I.（99分）你的名字？

A.（0.1分）设$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 2 & 2 & 2 \\ & & 3 & 3 \\ & & & 4 \end{bmatrix}$，如何在不具体计算$A^2 - A$的情况下求$rank(A^2 - A) =$?

M.（0.1分）判断题
(G)相似矩阵有相同特征值
(O)相似矩阵有相同秩
(O')相似矩阵有相同行列式
(D)相似矩阵有相同特征向量
(L)合同矩阵有相同特征值
(U)合同矩阵有相同特征向量
(C)合同矩阵有相同秩
(K)合同矩阵有相同行列式

P.（0.1分）设P是一个5×5置换矩阵。下列陈述错误的是 ()
(E)P是实正交矩阵
(A)P一定有实特征向量
(S)存在可逆的实矩阵Q使得$Q^{-1}PQ$为对角矩阵
(Y) 方程$Px = 0$仅有零解

R.（0.1分）设A为$n \times n$实对称矩阵，则下列陈述一定正确的是 ()
(C)A一定有n个互不相同的特征值
(A)A的一些复特征值可能不是实数
(L)A的任意n个线性无关特征向量两两正交
(M)存在正交矩阵Q，使得Q^TAQ为对角矩阵

O.（0.1分）设A为$n \times n$实对称矩阵。假设对任意列向量$x \in \mathbb{R}$都有$x^TAx = 0$，则()
(B)$|A| = 0$
(O)$A = 0$
(L)$tr(A) = 0$
(D)A在$\mathbb{C}$中唯一的特征值是0

U.（0.1分）考虑下面的二次型

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + kx_3^2 + 2x_3x_4 = 2x_4^2, \quad k \in \mathbb{R}$$

。写出f所表示的矩阵A并籍此矩阵判断二次型是否正定或负定，是否半正定或半负定。

D.（0.1分） (O)设A, B是n阶实对称矩阵且A是正定实对称矩阵。证明：存在n阶可逆实矩阵C使得$C^TAC = I_n$且C^TBC是对角矩阵。（这里I_n是n阶单位阵）
(K)A, B是n阶实对称矩阵,且$B - A$和A是正定矩阵。证明:$detB > detA$

O'.（0.1分）(F)设A是一个对称矩阵。A合同于单位阵等价于A正定，是否正确？若否，请给出反例。
(U)若A合同于B，则A相似于B，是否正确？若否，请给出反例。
(N)习题课上我们强调了有相似关系的矩阵是同一个**线性变换**在不同**基**下的矩阵，那么有合同关系的矩阵是**什么**在不同**什么**下的矩阵呢？

F.（0.1分）**如何从数学上严格区分球面和甜甜圈？**数学上记2维球面为S^2，记环面(甜甜圈，$S^1 \times S^1$)为T^2，对于这些几何体，赋予某些结构后我们常常称之为【拓扑空间】。拓扑学家把两个空间称为同胚的，若二者可以经由连续可逆变换互相转化（可以理解为两者可以在不剪开的情况下捏成对方）。对每个空间我们都可以计算【i阶实系数同调群】，这是一个线性空间。可以证明，i阶实系数同调群这个线性空间是同胚变换下的不变量，这表明，如果两个空间的某阶实系数同调群维数不同，则两个空间一定不是同胚的。S^2的i阶实系数同调群记作$H_i(S^2;\mathbb{R})$，同样T^2的i阶实系数同调群记作$H_i(T^2;\mathbb{R})$。我将在黑板上演示如何计算$H_1(S^2;\mathbb{R})$ 请计算$H_1(T^2;\mathbb{R})$，并说明$H_1(S^2;\mathbb{R})$和$H_1(T^2;\mathbb{R})$两个线性空间有不同的维数，进而我们就证明了S^2与T^2不同胚。

Y.（0.1分）**Projective plane(射影平面)上的线性变换** $\mathbb{P}^2$。射影平面$\mathbb{P}^2 = \{\mathbb{R}^3\text{中所有过原点的直线}\}$ 我将在黑板上演示射影平面$\mathbb{P}^2$是一个对径认同的二维圆盘。你可以想象这个空间：剪一个圆纸片，并将每一对对径点粘起来。由于射影平面非常奇特的几何性质，一个人如果站在射影平面的圆心朝任何方向开一枪，子弹将会从背后击中他自己。这个空间画不出来，只能想象。但幸运的是我们有坐标可以描述它。$\mathbb{P}^2$中的任何一个点可以用齐次坐标$[x_1 : x_2 : x_3]$表示，类比$\mathbb{R}^3$中任何一个点可以用坐标(x_1, x_2, x_3)表示。

$\mathbb{P}^2 = \{[x_1 : x_2 : x_3] | (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - 0\}$。其中，齐次坐标$[x_1 : x_2 : x_3]$代表经过点$[x_1 : x_2 : x_3]$的直线。由于在同一条直线上的点都对应同一条直线（$\mathbb{P}^2$中相同元素），因此$[x_1 : x_2 : x_3] = [kx_1 : kx_2 : kx_3], \forall k \neq 0$
(J)类比$\mathbb{P}^2 = \{\mathbb{R}^3\text{中所有过原点的直线}\}$, 我们定义$\mathbb{P}^1 = \{\mathbb{R}^2\text{中所有过原点的直线}\}$。$\mathbb{P}^1$是什么空间？
(O)同样我们可以给出$\mathbb{P}^1$上齐次坐标的定义，请写出这个定义。
(Y)$\mathbb{R}^2$上可以定义线性变换，在$\mathbb{P}^1$上也可以定义线性变换。任给可逆2×2矩阵$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，定义映射 $F_A : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $[x : y] \mapsto [ax + by : cx + dy]$。当$A$是什么矩阵时，$F_A$是$[x : y] \mapsto [x : y]$的映射？