1. (PPT习题)

Q1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数和负惯性指数分别为 ____.

Q2: 此二次型作换元 $\begin{cases} X=x_1+x_2 \\ Y=x_2+x_3 \\ Z=x_3-x_1 \end{cases}$ 可化为 $f(X,Y,Z)=X^2+Y^2-Z^2$

但这样正惯性指数是 2，与Q1计算不同. 是否违背惯性定律?

2. 这是PS 13的T13

3. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2=A$, 证明存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q^{-1}AQ=\operatorname{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0).$$

设 $Av=\lambda v$. 由 $A^2v=Av$ 得 $\lambda^2v=\lambda v$ 即 $(\lambda^2-\lambda)v=0$. $v\neq 0$ 故 $\lambda^2-\lambda=0$. 故 $\lambda=0$ 或 1.

由谱定理，$\exists Q$ s.t. $\underline{Q^{-1}AQ=\Lambda=\operatorname{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0)}$.

Q3: 划横线处是一个普遍的跳步，请补全证明.

Tips:

Spectrum thm (谱定理): 任何厄米矩阵可以酉对角化(即酉相似于某个对角阵)

即 $\forall A\in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $A^H=A$, 则存在 unitary U, s.t. $U^{-1}AU$ 是对角阵.

(若 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 满足 $A^T=A$, 则存在 orthogonal Q, s.t. $Q^{-1}AQ$ 是对角阵)

请仔细阅读谱定理，思考谱定理能帮助证明到哪一步，而划横线处光凭谱定理无法一步证明.

3. 空间二次曲面的分类问题

空间二次曲面由三元二次多项式的零点集定义. 采用矩阵书写, 三元二次多项式一般形式为 $f(x,y,z)=(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+2B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+C$

其中 A 是3阶对称矩阵, $B\in\mathbb{R}^{1\times 3}$, $C\in\mathbb{R}$.

本题考虑特殊情况.

Q: 考虑 $A=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, 经过配方和换元有

$g(X,Y,Z)=X^2+Y^2+Z^2-d$, 其中 $d=b_1^2+b_2^2+b_3^2-C$.

分析 $d\in\mathbb{R}$ 时 $V(g)=\{(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(X,Y,Z)=0\}$ 的可能图形?