1. 相似是两个矩阵之间的关系，用$A\sim B$表示A相似于B。这种关系有以下性质：

① $A\sim A$ （反身性，自己和自己相似）

② 若$A\sim B$则$B\sim A$ （对称性）

③ 若$A\sim B$，$B\sim C$则$A\sim C$ （传递性）

Q：证明这三个性质

实际上满足反身性、对称性、传递性的关系称为等价关系。

Q：给出一个等价关系的例子。

2. 有相同特征值的矩阵未必相似

Q：请找一个有相同特征值但不相似的例子。

3. A与B相似但A、B未必能对角化

Q：找矩阵A，B满足$A\sim B$但A，B不能对角化。

4. A有n个不同特征值，$AB=BA$则有$A(Bx)=B(Ax)=\lambda(Bx)$。

Q：为什么$\exists k$ s.t. $Bx=kx$？

5. A有n个不同特征值，A与B有相同特征向量。

设$Ax_i=\lambda_i x_i$. $Bx_i=\mu_i x_i$

$ABx_i=A(Bx_i)=A\mu_i x_i=\mu_i\lambda_i x_i$

$BAx_i=B(Ax_i)=B\lambda_i x_i=\lambda_i Bx_i=\lambda_i\mu_i x_i$

故$ABx_i=BAx_i$. 因此，$\forall v\in\mathbb{R}^n$，$ABv=BAv$. 故$AB=BA$

Q：以上步骤哪里有跳步？（提示："A有n个不同特征值"这个条件被用在哪里了？）

6. Q：K是skew-Hermitian，则特征值为纯虚数。

（Tips：倒着想，w.t.s. $\bar{\lambda}=-\lambda$，即证$\bar{\lambda}+\lambda=0$. 即证$(\bar{\lambda}+\lambda)\cdot \underbrace{v^Hv}_{\text{特征向量非零}}=0$）