A.（0.1分）设$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&2&2&2\\&&3&3\\&&&4\end{bmatrix}$，如何在不具体计算$A^2-A$的情况下求$rank(A^2-A)=?$

Trick：相似矩阵有相同秩. （$A=S\Lambda S^{-1}$，则$r(A)=r(\Lambda)$，因为S可逆）

☆ 上三角矩阵特征值在对角线上

☆ A有n个不同特征值 则A可对角化

$$A\sim\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{bmatrix}$$

$$A^2-A\sim\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\&4&&\\&&9&\\&&&16\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&&&\\&2&&\\&&6&\\&&&12\end{bmatrix}$$. 故 $A^2-A\sim\Lambda^2-\Lambda$.

$$S^{-1}\Lambda^2S-S^{-1}\Lambda S=S^{-1}(\Lambda^2-\Lambda)S$$

$$r(A^2-A)=r(\Lambda^2-\Lambda)=3.$$

M.（0.1分）判断题

(G)相似矩阵有相同特征值 ✓

(O)相似矩阵有相同秩 ✓

(O')相似矩阵有相同行列式 ✓

(D)相似矩阵有相同特征向量 ✗

(L)合同矩阵有相同特征值 ✗

(U)合同矩阵有相同特征向量 ✗

(C)合同矩阵有相同秩 ✓

(K)合同矩阵有相同行列式 ✗

P.设P是一个5×5置换矩阵。下列陈述错误的是（S

(E)P是实正交矩阵

(A)P一定有实特征向量

(S)存在可逆的实矩阵Q使得$Q^{-1}PQ$为对角矩阵

(Y) 方程$Px=0$仅有零解

E. 正确. P的列是 $e_1\sim e_5$ 的重排列 不改变标准正交的关系

A. 正确 P有实特征值λ_0. $N(P-\lambda_0 I)\subseteq\mathbb{R}^n$ 非空，故P有实特征向量.

$|P-\lambda I|=0$ 是5次特征多项式. 由于复根一定成对共轭出现, $|P-\lambda I|=0$必有实根

S. 正规矩阵P可以酉对角化，但酉阵Q未必是实矩阵. 因为Q是由特征向量构成的，而P可有复特征向量.

- 正规矩阵

[Def] 若$A^HA=AA^H$，则称A是正规矩阵(normal matrix)

[Exp] Hermitian ; real symmetric ; skew-Hermitian $(A=-A^H)$; unitary ……

[Fact] 正规矩阵可以酉对角化

Y. P表示置换基变换必可逆(或理解为正交矩阵必有逆 P^T)，$Px=0$ 只有零解.

R. 设A为$n\times n$实对称矩阵，则下列陈述一定正确的是（M
(C)A一定有n个互不相同的特征值
(A)A的一些复特征值可能不是实数
(L)A的任意n个线性无关特征向量两两正交
(M)存在正交矩阵Q，使得Q^TAQ为对角矩阵

C：反例 $\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}$

A：实对称必厄米. 厄米阵都有实特征值

L：正规矩阵 $E(A,\lambda_1)\perp E(A,\lambda_2)$ if $\lambda_1\neq\lambda_2$. 但若 $\dim(E(A,\lambda_1))\geq 2$
则总可找一组非正交基.

M：实对称矩阵必可正交对角化.

O. 设A为$n\times n$实对称矩阵。假设对任意列向量$x\in\mathbb{R}$都有$x^TAx=0$，则（L
(B)$|A|=0$
(O)$A=0$
(L)$tr(A)=0$
(D)A在$\mathbb{C}$中唯一的特征值是0

$\forall x$ 有 $x^TAx=0$ Trick：取特殊值.

取 $e_i=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow i\text{th}$ $e_i^TAe_i=A_{ii}=0$. 故 A是对角线为0的矩阵, 因此 $tr(A)=0$.

U. 考虑下面的二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+kx_3^2+2x_3x_4+2x_4^2,\quad k\in\mathbb{R}$$

。写出f所表示的矩阵A并籍此矩阵判断二次型是否正定或负定，是否半正定或半负定。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&k&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$

Recall：$\begin{bmatrix}A&B\\&C\end{bmatrix}$ 是分块矩阵，A,B,C是方阵，则 $\begin{vmatrix}A&B\\&C\end{vmatrix}=|A|\cdot|C|$

$A_0=0$，排除正定&负定. 判断是否半正/负定用特征值判别（计算所有主子式比较麻烦）

$$\begin{vmatrix}-\lambda&1&0&0\\1&-\lambda&0&0\\0&0&k-\lambda&1\\0&0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}\begin{vmatrix}k-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)\begin{vmatrix}k-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

±1是特征值，故不是半正定也不是半负定

2. k阶主子式：在n阶方阵A中，选取k行k列（k≤n），位于这些行和列的交叉点上的k²个元素按其在A中的相对位置所构成的k阶行列式，称为A的一个k阶主子式。特别地，A的1阶主子式就是A的对角线元素。

3. 顺序主子式：在n阶方阵A中，选取从左上角开始的连续k行k列（k≤n），所构成的k阶行列式称为A的一个顺序主子式。

三、矩阵半正定/半负定

（1）求出A的所有特征值。若A的特征值均非负，则A是半正定的；若A的特征值均非正，则A为半负定的。

（2）计算A的**所有主子式**。若A的所有主子式均非负，则A是半正定的。

D.（0.1分） (O)设A，B是n阶实对称矩阵且A是正定实对称矩阵。证明：存在n阶可逆实矩阵C使得$C^TAC=I_n$且C^TBC是对角矩阵。(这里I_n是n阶单位阵)
(K)A,B是n阶实对称矩阵,且$B-A$和A是正定矩阵。证明:$detB > detA$

(O) 由A正定得 $\exists R$ s.t. $R^TAR=I$. $(R^TBR)^T = R^TB^TR = R^TBR$ 是对称的.
故 $\exists$ 正交阵 Q s.t. $Q^TR^TBRQ=\Lambda$. 令 $C=RQ$, 则有 $\begin{cases} C^TBC=\Lambda \\ C^TAC = Q^TR^TARQ = Q^TQ = I \end{cases}$

(K) 由(O), $\exists C$ s.t. $C^TAC=I$, $C^T(B-A)C=D$. 由$\begin{cases}\text{惯性定理} \\ B-A\text{正定}\end{cases}$, 得 $D_{ii}>0$, $\forall i=1,\dots,n$.

故 $C^TBC = C^T(B-A+A)C = D+I$.

$|C^TBC| = \prod_i (D_{ii}+1) > \prod_i 1 = |I| = |C^TAC| \Rightarrow |C^TBC| > |C^TAC|$
$\xRightarrow{C\text{可逆}} |B|>|A|$.

O'.（0.1分）(F)设A是一个对称矩阵。A合同于单位阵等价于A正定，是否正确？若否，请给出反例。
(U)若A合同于B，则A相似于B，是否正确？若否，请给出反例。
(N)习题课上我们强调了有相似关系的矩阵是同一个**线性变换**在不同**基**下的矩阵，那么有合同关系的矩阵是**什么**在不同**什么**下的矩阵呢？

(F) 正确 A合同于单位阵 $\Leftrightarrow$ $\exists$可逆S, $A=S^TS$ $\Leftrightarrow$ A正定

(U) 否. 反例只要找一个特征值不是1的正定矩阵即可.

例如, $\begin{bmatrix}1&\\&2\end{bmatrix}$ 正定 故 $\begin{bmatrix}1&\\&2\end{bmatrix}$ 合同于 $\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}$. 但 $\begin{bmatrix}1&\\&2\end{bmatrix}$ 不相似于 $\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}$, 因为特征值不同.

(N) 设 $[u_1,u_2,\dots,u_n]$ 是 n-dim 线性空间V的一组基, $\mathcal{A}: V\times V\to\mathbb{R}$ 是双线性映射.

$$\mathcal{A}: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u_i,u_j) \mapsto A_{ij} := \mathcal{A}(u_i,u_j)$$

, 称矩阵 $A=(A_{ij})$ 是双线性变换$\mathcal{A}$在基$[u_1,\dots,u_n]$下的矩阵.

(只要知道$\mathcal{A}$在基上的取值即可知道 $\mathcal{A}$ 在 $\forall(\sum a_iu_i, \sum b_ju_j)\in V\times V$ 上的值.
$\forall$ $\mathcal{A}(\sum a_iu_i, \sum b_ju_j) = \sum_i\sum_j a_ib_j\mathcal{A}(u_i,u_j) = \sum_i\sum_j a_ib_jA_{ij}$)

设 $[w_1,\dots,w_n] = [u_1,\dots,u_n]P$, 其中P是基之间的过渡矩阵.

设 M^u 是 $\mathcal{A}$在$[u_1,\dots,u_n]$下的矩阵, M^w 是 $\mathcal{A}$在$[w_1,\dots,w_n]$下的矩阵.

$$M^w_{ij} = \mathcal{A}(w_i,w_j) = \mathcal{A}\Big(\sum_l u_lP_{li}, \sum_k u_kP_{kj}\Big) = \sum_{l,k} P_{li}P_{kj}\,\mathcal{A}(u_l,u_k) = \sum_{l,k} P_{li}P_{kj}M^u_{lk}$$

$$= \sum_{l,k} (P^T)_{il} M^u_{lk} P_{kj} = (P^TM^uP)_{ij} \Rightarrow M^w = P^TM^uP$$

同一个双线性函数在不同基下的矩阵是合同关系.

F.**如何从数学上严格区分球面和甜甜圈?** 数学上记2维球面为S^2，记环面(甜甜圈，$S^1 \times S^1$)为T^2，对于这些几何体，赋予某些结构后我们常常称之为【拓扑空间】。拓扑学家把两个空间称为同胚的，若二者可以经由连续可逆变换互相转化（可以理解为两者可以在不剪开的情况下捏成对方）。对每个空间我们都可以计算【i阶实系数同调群】，这是一个线性空间。可以证明，i阶实系数同调群这个线性空间是同胚变换下的不变量，这表明，如果两个空间的某阶实系数同调群维数不同，则两个空间一定不是同胚的。S^2的i阶实系数同调群记作$H_i(S^2;\mathbb{R})$，同样T^2的i阶实系数同调群记作$H_i(T^2;\mathbb{R})$。我将在黑板上演示如何计算$H_1(S^2;\mathbb{R})$.请计算$H_1(T^2;\mathbb{R})$，并说明$H_1(S^2;\mathbb{R})$和$H_1(T^2;\mathbb{R})$两个线性空间有不同的维数，进而我们就证明了S^2与T^2不同胚。

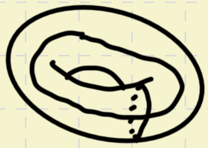
不严格:

$H_1(X;\mathbb{R})=$ 以所有不能缩成点的Loop为基的实线性空间.

若两个Loop可以互相变换,则看成同一个Loop.

$H_1(S^2;\mathbb{R})=0$ (所有Loop可以缩成点)

$H_1(T^2;\mathbb{R})=\mathbb{R}a\oplus\mathbb{R}b$



Y.（0.1分）**Projective plane(射影平面)上的线性变换** $\mathbb{P}^2$。射影平面$\mathbb{P}^2=\{\mathbb{R}^3$中所有过原点的直线$\}$

我将在黑板上演示射影平面$\mathbb{P}^2$是一个对径认同的二维圆盘。你可以想象这个空间：剪一个圆纸片，并将每一对对径点粘起来。由于射影平面非常奇特的几何性质，一个人如果站在射影平面的圆心朝任何方向开一枪，子弹将会从背后击中他自己。这个空间画不出来，只能想象。但幸运的是我们有坐标可以描述它。$\mathbb{P}^2$中的任何一个点可以用齐次坐标$[x_1:x_2:x_3]$表示，类比$\mathbb{R}^3$中任何一个点可以用坐标(x_1,x_2,x_3)表示。

$\mathbb{P}^2=\{[x_1:x_2:x_3]|(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3-0\}$。其中，齐次坐标$[x_1:x_2:x_3]$代表经过点$[x_1:x_2:x_3]$的直线。由于在同一条直线上的点都对应同一条直线（$\mathbb{P}^2$中相同元素），因此$[x_1:x_2:x_3]=[kx_1:kx_2:kx_3], \forall k\neq 0$

(J)类比$\mathbb{P}^2=\{\mathbb{R}^3$中所有过原点的直线$\}$, 我们定义$\mathbb{P}^1=\{\mathbb{R}^2$中所有过原点的直线$\}$。$\mathbb{P}^1$是什么空间?

(O)同样我们可以给出$\mathbb{P}^1$上齐次坐标的定义，请写出这个定义。

(Y)$\mathbb{R}^2$上可以定义线性变换，在$\mathbb{P}^1$上也可以定义线性变换。任给可逆2×2矩阵$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,定义映射 $F_A:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$, $[x:y]\mapsto[ax+by:cx+dy]$。当$A$是什么矩阵时，$F_A$是$[x:y]\mapsto[x:y]$的映射?

(J) $\mathbb{P}^1=S^1$

(O) $\mathbb{P}^1=\{[x_1:x_2]\,|\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2-0\}$，其中$[x_1:x_2]$表示经过$(x_1,x_2)$的直线.

(Y)答案: $A=kI$, $k\in\mathbb{R}-0$.

Claim: $F_A=F_B \Leftrightarrow A=\lambda B$

$\Leftarrow$ Obvious

$\Rightarrow$ Assume $F_A = F_B$.

定义映射 $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1$,
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto [x:y]$

则 $F_A = p\varphi_A$, $F_B = p\varphi_B$, i.e., $p\varphi_A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = p\varphi_B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

特别地, 对 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 都成立.

记 $A = [A_1 \ A_2]$, 其中 A_i 是 A 的第 i 列. $B = [B_1 \ B_2]$ 同理.

$$\left.\begin{aligned} p\varphi_A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= p\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = p(A_1) \\ p\varphi_B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= p\left(B\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = p(B_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow p(A_1) = p(B_1).$$

由 p 的定义, 有 $A_1 = \lambda_1 B_1$ for some $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$.

类似地, 由 $p\varphi_A\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = p\varphi_B\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, 有 $A_2 = \lambda_2 B$ for some $\lambda_2 \in \mathbb{C}^*$.

因此 A 必形如 $A = [\lambda_1 B_1 \ \lambda_2 B_2]$. 由 $p\left(A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = p\left(B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$,
有 $p(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = p(B_1 + B_2)$. $\Rightarrow \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = k(B_1 + B_2)$, for some $k \in \mathbb{R}^*$. 由 B_1, B_2 L. ind., 有 $\lambda_1 = \lambda_2 = k$. 故
$A = [kB_1 \ kB_2] = k[B_1 \ B_2] = kB$ for some $k \in \mathbb{R}^*$.

观察得 F_I 是 $[x:y] \mapsto [x:y]$ 的映射. 而 $F_A = F_I \Leftrightarrow A = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.