Week9 讲稿

Determinant 行列式.

- 为什么需要行列式?
  1. 快速判断矩阵是否可逆. $\det(A)\neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆
  2. 后续课程求特征值会用到.

三种常见的行列式定义

定义 1

- 单射 满射与双射

给定集合A,B间映射 $f:A\to B$. 称f是单射若 $\forall f(a)=f(b)$ 有 $a=b$. 称f是满射若 $\forall b\in B$, $\exists a\in A$ s.t. $f(a)=b$. 称f是双射若f既是单射又是满射.

*直观来看,一个双射f给出了两个集合间的一一对应.

Rmk: $\begin{aligned}\mathbb{Z} &\to 2\mathbb{Z}\\ n &\mapsto 2n\end{aligned}$ 是整数集和偶数集间的一一对应,某种程度上而言在说整数和偶数"一样多".

- 置换 设 $\Omega_n=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ 是一个有n个元素的集合.
  称双射 $\sigma:\Omega_n\to\Omega_n$ 是 Ω_n 上的一个置换

[例] $\sigma:\Omega_3\to\Omega_3$
$$\begin{aligned}x_1&\mapsto x_1\\ x_2&\mapsto x_3\\ x_3&\mapsto x_2\end{aligned}$$
$\sigma(x_1)=1$ $\sigma(x_2)=3$ $\sigma(x_3)=2$

(之前习题课讲过的例子)

[定义] 记 $S_n:=\{$所有 Ω_n 上的置换$\}$, i.e., $\forall \sigma\in S_n$ 有 σ 是 Ω_n 上的一个置换.

- 置换的写法.

用记号 $(i_1\ i_2\cdots i_n)$ 表示置换 σ, 满足:

$\sigma(i_1)=i_2$, $\sigma(i_2)=i_3$, $\dots$, $\sigma(i_{n-1})=i_n$, $\sigma(i_n)=i_1$. 我们省略不动的点

[例] ① $\sigma:\Omega_3\to\Omega_3$
$$\begin{aligned}x_1&\mapsto x_1\\ x_2&\mapsto x_3\\ x_3&\mapsto x_2\end{aligned}$$
$\rightsquigarrow$ $(2\,3)$ 表示第2个元与第3个元置换.

② $\sigma:\Omega_4\to\Omega_4$
$$\begin{aligned}x_1&\mapsto x_2\\ x_2&\mapsto x_1\\ x_3&\mapsto x_4\\ x_4&\mapsto x_3\end{aligned}$$
$\rightsquigarrow$ $(1\,2)(3\,4)$

• 奇置换与偶置换.

计算方法: $(i_1 \cdots i_n)$ 计 $n-1$ 次. 计算一个置换所有次数, 若是奇数就是奇置换, 偶数就是偶置换.

[例] $(123)(45)(67) \rightsquigarrow 2+1+1=4$ 是偶置换.

• 行列式的定义. A 是一个 $n\times n$ 方阵, 矩阵元记为 a_{ij}

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in S^n}\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)},\quad \text{其中 } \operatorname{sgn}(\sigma)=\begin{cases}1 & \sigma\text{是偶置换}\\ -1 & \sigma\text{是奇置换}\end{cases}$$

[例]

$$S_3=\{\underset{\text{偶}}{(123)}\ \underset{\text{偶}}{(132)},\underset{\text{奇}}{(13)},\underset{\text{奇}}{(12)},\underset{\text{奇}}{(23)}\ \underset{\text{偶}}{(1)}\}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S^n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$$

$$=a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{11}a_{22}a_{33}$$

$\boxed{\text{定义 II}}$

令 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是一个排列, 定义逆序数 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 的计算方法: 从第一个数开始, 往后数比它小的数的个数. 例如 $\tau(3\,5\,1\,2\,4)=2+3+0+0+0=5$

$$\det A=\sum_{\{j_1,j_2,\cdots j_n\}}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$,其中求和是对所有排列求和.

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是数字 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列, $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 是逆序数.

Rmk: 定义II与定义I 是等价的.

排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 对应置换 $\sigma:\Omega_n\to\Omega_n$, $i\longmapsto j_i$.

$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 的奇偶性等于置换的奇偶性, 即 $(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}=\operatorname{sgn}(\sigma)$.

因为 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ = 把排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 排成 $1,2,\cdots,n$ 所需相邻两数交换的次数.

例如 $35124\longrightarrow 31524\longrightarrow 31254\longrightarrow 31245\longrightarrow 13245\longrightarrow 12345$

$$\tau(35124)=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{数字3移2次}}}{2}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{把5移到正序要移3次}}}{3}+0+0+0$$

定义Ⅲ

可用 1~n 的排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 表示一个置换矩阵.

$$如\ (1,3,2)=\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}$$

规定 偶排列对应的P 行列式为1，奇排列对应的P行列式为-1.

$$定义\quad \det A=\sum_{\text{all P's}}(a_{1\alpha}a_{2\beta}\cdots a_{n\gamma})\det P$$

* 易知定义Ⅲ与定义Ⅰ是等价的.

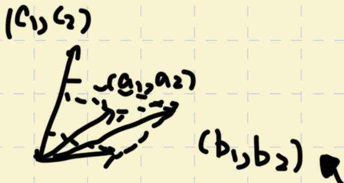
• 代数余子式展开

M_{ij} = 将A的第i行和第j列删去，剩下的元素排成的矩阵.

$\det A=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}$，$C_{ij}=(-1)^{i+j}\underbrace{\det M_{ij}}_{\text{称为余子式, cofactor}}$，$C_{ij}$ 称为代数余子式

[例]

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$



•行列式的性质.（以下性质对列也正确）

① $\det I=1$ （单位Box体积是1）

② 行线性

$$\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2&a_3+b_3&\cdots\\c_1&c_2&c_3&\cdots\\d_1&d_2&d_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots\\c_1&c_2&c_3&\cdots\\d_1&d_2&d_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3&\cdots\\c_1&c_2&c_3&\cdots\\d_1&d_2&d_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{vmatrix}$$

（Box 拆成两个Box体积和. e.g. $\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_2+b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}$）

$$\begin{vmatrix}ta_1&ta_2&ta_3&\cdots\\c_1&c_2&c_3&\cdots\\d_1&d_2&d_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots\\c_1&c_2&c_3&\cdots\\d_1&d_2&d_3&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{vmatrix}$$

（任一边长度拉伸t倍，体积变原来t倍）

③ 行互交换

$$A=\begin{bmatrix}A_1\\\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j\\\vdots\\A_n\end{bmatrix}\qquad \det\begin{bmatrix}\vdots\\A_i\\\vdots\\A_j\\\vdots\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}\vdots\\A_j\\\vdots\\A_i\\\vdots\end{bmatrix}$$

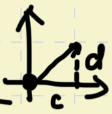
（Box 手系变换，有向体积是原来-1倍）

④ 某行减另一行l倍不改变行列式

$$\begin{vmatrix} a-lc & b-ld \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \text{pf: } \begin{vmatrix} a-lc & b-ld \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} -lc & -ld \\ c & d \end{vmatrix}}_{0} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

⑤ 若出现0行则 $\det A=0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

(

由0与(c,d)围成的面积是0)

⑥ 若两行相同则 $\det A=0$ ( 由两个相同向量围成的面积是0)

⑦ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

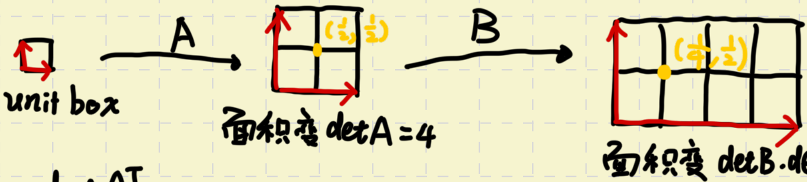
选定基后，A, B视为两个线性变换. AB是复合线性变换

$\det(AB)$ 理解为线性变换AB把unit box变成$\det(AB)$倍

$\det(A)$ 理解为线性变换A把 unit box 变成$\det A$倍

$\det(B)$ 理解为线性变换B把 unit box 变成$\det B$倍

以2x2矩阵($\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$变换)为例. 假设$\det A = \det B = 2$



⑧ $\det A = \det A^T$

pf: 若 A singular, 则A不满秩. 由$r(A^T)=r(A)$可知 A^T也不满秩, 因此A^T也singular

于是 $\det A = 0 = \det A^T$, 等式成立.

若A nonsingular, 则存在置换矩阵P, s.t. PA有LDU分解 $PA=LDU$ (1)

(1)式取行列式$|PA|=|LDU|=|L||D||U|$. (1)式取转置得 $A^TP^T=U^TD^TL^T$ (2).

(2)式取行列式得 $|A^TP^T|=|U^T||D^T||L^T|$.

$$\begin{cases} |P||A| = |L||D||U| \\ |A^T||P^T| = |L^T||D^T||U^T| \end{cases}$$

(i) $PP^T=I \Rightarrow |P||P^T|=1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{若}|P|=1 \text{ 则 } |P^T| = 1\div 1 = 1. \text{ 故 } |P^T|=|P| \\ \text{若}|P|=-1 \text{ 则 } |P^T| = 1\div(-1) = -1. \text{ 故 } |P^T|=|P| \end{array}\right\} \Rightarrow |P^T|=|P|$$

(ii) 利用上(下)三角行列式是对角线元素相乘, 而转置不改变对角元, 故上(下)三角行列式等于其转置.

⑨ $\det A=0 \Leftrightarrow A$不可逆　　$\left(\begin{array}{l}|A\cdot A^{-1}|=|I|=1\\ |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\end{array}\right)$

$\det A\neq 0 \Leftrightarrow A$可逆

选定基后，A理解为$\mathbb{R}^n$上的线性变换. $A=[A_1\ A_2\ \cdots A_n]$. 线性变换把$\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$变$A_1$，$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$变成$A_2$，…，$\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$变成$A_n$. $\det A$是$A_1,A_2,\cdots,A_n$围成的Box的测度(2维指面积,3维指体积,高维类比)

如果$A_1,\cdots,A_n$线性相关，则Box测度为0.

$\Updownarrow$　　　　　　　　　$\Updownarrow$

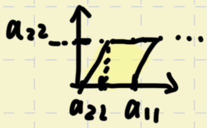
A不可逆　　　　　　　　$\det A=0$

⑩ 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & * \\ & a_{22} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{bmatrix}$ 是上三角. 则 $\det A=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

这是相当惊人的结果，行列式并不如想象中那么敏感地依赖于每一个矩阵元. 上三角或下三角的行列式只依赖于对角元.

实际上从二维就可以发现这一现象

$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}$



这里box(平行四边形)的面积等于底乘高

a_{22}只调整此四边形有多"斜"，不改变面积

⑪ 分块矩阵 $\det\begin{bmatrix}A & B\\ & C\end{bmatrix}=|A|\,|C|$

- 反对称多重线性函数

[定义] (unformal) 若$f: A_1\times A_2\times\cdots\times A_n \to \mathbb{R}$，满足

$(a_1,\cdots,a_n)\longmapsto f(a_1,\cdots,a_n)$

① f关于每一个位置是线性的，e.g.,

$f(a_1, ka_2+la_2', a_3)=kf(a_1,a_2,a_3)+lf(a_1,a_2',a_3)$

② 任意两个位置换序导致反号

$f(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots,a_n)=-f(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots,a_n)$

则称f是反对称多重线性函数.

定义映射 $\det: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(A_1, \cdots, A_n) \longmapsto \det[A_1\ A_2 \cdots A_n]$$

我们发现从映射的观点看行列式就是一个反对称多重线性映射.

- Applications of determinant

① $A^{-1} = \dfrac{C^T}{\det A}$，其中 $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$，$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 是代数余子式

pf: $(AC^T)_{ij} = \sum_k A_{ik} C^T_{kj} = \sum_k A_{ik} C_{jk}$

①若 $i=j$，原式 $= \sum_k A_{ik} C_{ik} = \det A$

②若 $i \neq j$，原式 $= \sum_k A_{ik} C_{jk}$.

令B是一个 $n \times n$ 矩阵 满足 $B_{lk} = \begin{cases} A_{lk} & l \neq j \\ A_{ik} & l = j \end{cases}$

由于 $i \neq j$，B就是把矩阵A的第j行换成矩阵A的第i行、

B除了第j行外与A完全相同，因此B在第j行的行数余子式与A相同，

都是 C_{ij}. 故B的行列式按第j行展开是 $\det B = \sum_{k=1}^n B_{jk} C_{jk} = \sum_{j=1}^n A_{ik} C_{jk}$

另一方面，由构造B的第i行等于B的第j行，两行相同 则 $\det B = 0$.

因此 $\sum_{j=1}^n A_{ik} C_{jk} = 0$.

综上 $(AC^T)_{ij} = \det A\, \delta_{ij}$，即 $AC^T = \det A) \cdot I$

故 $A^{-1} = \dfrac{C^T}{\det A}$

*此方法可以用于口算二阶矩阵的逆. 但是公式不要背错了，注意是 C^T 不是 C.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$$

②Cramer's rule（揭示解的结构）

设A可逆，则 $Ax=b$ 有唯一解. 设唯一解为 x，x 的第j个分量，则

$x_j = \dfrac{\det B_j}{\det A}$ 其中 B_j 是把矩阵A的第j列替换成b.

例如
$$\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$$
$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}0&3\\6&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}}\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&0\\2&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}}$$

Pf: $x=A^{-1}b=\dfrac{C^Tb}{\det A}$ 故 $x_j=\left(\dfrac{C^Tb}{\det A}\right)_j=\dfrac{\sum_k C^T_{jk}b_k}{\det A}=\dfrac{\sum_k C_{kj}b_k}{\det A}$

令 B_j 为将A的第j列换成b的矩阵. 则 $\det B_j$ 按第j列展开是 $\det B=\sum_k b_kC_{kj}$

故 $x_j=\dfrac{\det B_j}{\det A}$

③ 主元的乘积

Notations: A是一个 $n\times n$ 矩阵. A_k 是A的左上角 $k\times k$ 子矩阵.
设A有LDU分解, $A=LDU$. L_k,D_k,U_k 分别表示 LDU 的左上角 $k\times k$ 子矩阵.
D的对角线元素是 $d_1,d_2,\cdots,d_n$, 是A的主元.

[prop] $A=LDU$, 则 A_k 的LDU分解正好是 $A_k=L_kD_kU_k$

Pf: 设 $L=\begin{bmatrix}L_k&\\B&C\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}D_k&\\&E\end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix}U_k&F\\&G\end{bmatrix}$

则 $A=LDU=\begin{bmatrix}L_kD_kU_k&L_kD_kF\\BD_kU_k&BD_kF+CEG\end{bmatrix}$

由记号 A_k 是A的左上角 $k\times k$ 子矩阵, $A_k=L_kD_kU_k$. □

△ $\det A_k=|L_k||D_k||U_k|=1\cdot d_1d_2\cdots d_k\cdot 1=d_1d_2\cdots d_k$.
这说明A的左上角 $k\times k$ 子矩阵行列式是前k个主元相乘.

△ 观察有 $\dfrac{\det A_k}{\det A_{k-1}}=\dfrac{d_1d_2\cdots d_k}{d_1d_2\cdots d_{k-1}}=d_k$. 可以通过此公式求A的第k个主元

$\begin{bmatrix}1&1&\\1&&\\&&1\end{bmatrix}$ 的第2个主元是 $\dfrac{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}}{|1|}=-1$, 它的第三个主元是 $\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}}=1$

△ Recall: 做A的LDU分解第一步是做LU分解. LU分解若想不换行, 必须主元非零. 观察主元公式 $d_k=\dfrac{\det A_k}{\det A_{k-1}}$, 有如下分析:

$d_k\neq 0$ 对 $\forall k=1,2,\cdots,n$ 成立 $\Leftrightarrow \det A_k\neq 0,\ \forall k=1,2,\cdots,n$.
$\Leftrightarrow A_k$ 可逆, $\forall k=1,2,\cdots,n$.

例如 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，$A_2$不可逆，因此不可能在不换行情况下做LU分解

*注意，只有A可做LDU分解时才有行列式等于主元乘积.

例如 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$ $\det A=-1\neq 1\times1\times1\times1=1$

③ The volume of a Box

[prop] 设 $A=[A_1\ A_2\ \cdots\ A_n]$，其中 $A_i\in\mathbb{R}^n$. 则 $\det A$"等于"向量 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 所围成的几何体的体积.

Pf: (i) Special case：设A的每一列互相正交，即 $A_i^TA_j=\begin{cases}|A_i|^2 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ (*)

由(*)，我们有 $(A^TA)_{ij}=\sum_k (A^T)_{ik}A_{kj}=\sum_k A_{ki}A_{kj}=\sum_k (A_i)_k(A_j)_k=A_i^TA_j$

A_{ki} 矩阵第k行第i列

$(A_i)_k$ 矩阵第i列第k行(第k个分量)

故 $A_{ki}=(A_i)_k$

故 $A^TA=\begin{bmatrix}|A_1|^2 & & & \\ & |A_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A_n|^2\end{bmatrix}$

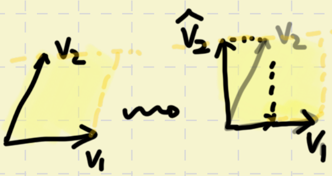
$\det(A^TA)=|A_1|^2\cdots|A_n|^2=(|A_1|\cdots|A_n|)^2=V^2$，V是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 所围成的几何体的体积. 另一方面 $\det(A^TA)=\det(A^T)\det(A)=(\det A)^2$

故 $\det A=V$ (若$\det A<0$，体积为负，含义是与我们规定的体积定向相反)

(ii) General Case：设A是任意矩阵.

若A列线性相关，则 $\det A=0$，此时体积也为0，二者相同.

若A列线性无关，则可做施密特正交化. 我们发现对 $\{A_1,\cdots,A_n\}$ 做施密特正交化不改变体积



(相同的底乘相同的高)

而对 $\{A_1,\cdots,A_n\}$ 做施密特正交化也不改变行列式，因为施密特正交化的过程恰是每一列减去某几列的倍数，不改变行列式

$$|A_1\ A_2\ \cdots\ A_n| = |A_1\ \ A_2-a_1A_1\ \ A_3\ \cdots\ A_n| \quad \left(\begin{array}{l}\text{记 } \hat{A}_1 := A_1 \\ \text{记 } \hat{A}_2 := A_2 - a_1 A_1\end{array}\right)$$

$$= |\hat{A}_1\ \ \hat{A}_2\ \ A_3 - a_2\hat{A}_2 - a_3\hat{A}_1\ \ A_4\ \cdots\ A_n|$$

$$\cdots$$

$$= |\hat{A}_1\ \hat{A}_2\ \cdots\ \hat{A}_n| = V_{\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_n} = V_{A_1,\cdots,A_n}$$

其中$\hat{A}_1,\cdots,\hat{A}_n$每一列正交，reduced到第一种特殊情况.

• 对上一次内容的更正

QR分解的过程：

设A的列线性无关，$A=[A_1 \cdots A_n]$.　（$A_1,\cdots,A_n$ 可视作 $\mathbb{R}^n$ 普通基）

对A的列$\{A_1,\cdots,A_n\}$做施密特正交化并归一化，得到 $Q=[Q_1 \cdots Q_n]$

（$Q_1,\cdots,Q_n$ 视作 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基）

A_3在Q_1轴上的坐标

$$A=[A_1\cdots A_n]=[Q_1 \cdots Q_n]\underbrace{\begin{bmatrix} A_1^TQ_1 & A_2^TQ_1 & A_3^TQ_1 & \cdots \\ 0 & A_2^TQ_2 & A_3^TQ_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & A_3^TQ_3 & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & \\ & & 0 & \end{bmatrix}}_{\text{过渡矩阵}}$$

例如 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

$$A_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$Q_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix},\ Q_2=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{bmatrix},\ Q_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$A=[Q_1\ Q_2\ Q_3]\begin{bmatrix}A_1^TQ_1 & A_2^TQ_1 & A_3^TQ_1\\ 0 & A_2^TQ_2 & A_3^TQ_2\\ 0 & 0 & A_3^TQ_3\end{bmatrix}=[Q_1\ Q_2\ Q_3]\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

★为什么过渡矩阵一定是上三角？

$$\begin{bmatrix} A_1^TQ_1 & A_2^TQ_1 & A_3^TQ_1 & \cdots \\ 0 & A_2^TQ_2 & A_3^TQ_2 & \cdots \\ \vdots & 0 & A_3^TQ_3 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \\ & 0 & \vdots & \\ & & 0 & \end{bmatrix}$$

回顾施密特正交化的过程

$\hat{A}_2$ 是A_2减掉往A_1空间的投影，因此$\hat{A}_2$与A_1正交

$\hat{A}_3$ 是A_3减去$\mathrm{span}(A_1,A_2)$的投影，因此$\hat{A}_3$与A_1,A_2正交.

$\hat{A}_4$ 是A_4减去$\mathrm{span}(A_1,A_2,A_3)$的投影，因此$\hat{A}_4$与$A_1,A_2,A_3$正交.

⋮

$$\left.\begin{array}{l}Q_2\text{是}\hat{A}_2\text{归一，故}Q_2\text{与}A_1\text{正交.}\\ Q_3\text{是}\hat{A}_3\text{归一，故}Q_3\text{与}A_1,A_2\text{正交.}\\ Q_4\text{是}\hat{A}_4\text{归一，故}Q_4\text{与}A_1,A_2,A_3\text{正交}\\ \quad\vdots\end{array}\right\}\ \text{统计，发现有 }A_k\text{ 与 }Q_j,\ j>k\text{ 正交.}$$

HW

T2 实上三角正交阵是对角阵且对角元是±1

Pf: 设U是实上三角正交阵，则 $U^TU=I$，故 $U^T=U^{-1}$.

L.H.S.$=U^T$ 是一个下三角. R.H.S.$=U^{-1}$ 是上三角.

U^T既是上三角又是下三角，故 U^T 是对角矩阵. U是对角阵的逆，也是对角阵.

设 $U=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n\end{bmatrix}$. 由于U是正交矩阵，每一列模长是1，故对角元 $d_i=\pm1$

4. 证明：任何一个 n 阶可逆实方阵 A 都可以表为一个实正交方阵 Q 和一个对角元全为正数的上三角方阵 R 的乘积, 即

$$A=QR.$$

而且这种表示法唯一.

Pf: (存在性) A可逆 故可作QR分解 $A=Q\cdot R$. 设 $\exists\, i$, s.t. 对角元 $R_{ii}<0$.

则我们把矩阵Q的第i列乘上 -1 得到修正后的 $\tilde{Q}$. 此时 $A=\tilde{Q}\tilde{R}$, $\tilde{R}_{ii}>0$.

重复此步骤可将R的对角元全变为正数.

(有没有可能 $\exists\, j$, $R_{jj}=0$? 不可能. 否则 $\det A=\det Q\cdot\underbrace{\det R}_{(对角元乘积)}=\det Q\cdot 0=0$

(唯一性). 设 $A=Q_1R_1=Q_2R_2$ 是两种满足要求的QR分解.

$|A|=|Q_1||R_1|=|Q_2||R_2|$. 由于 $|A|\neq0$，可知 $|Q_1|,|R_1|,|Q_2|,|R_2|\neq0$. 故它们都可逆.

$Q_1R_1=Q_2R_2 \Rightarrow Q_2^{-1}Q_1=R_2R_1^{-1}$

L.H.S.$=Q_2^{-1}Q_1$ 是实正交矩阵, R.H.S.$=R_2R_1^{-1}$ 是上三角.

因此 $R_2R_1^{-1}$ 是实上三角正角阵，由T2 它是对角元为±1的对角阵.

设 $R_2R_1^{-1}=\Lambda$, $\Lambda_{ii}=1$ 或 -1, $i=1,2,\cdots,n$. 假设 $\exists\, j$, s.t. $\Lambda_{jj}=-1$.

由 $R_2R_1^{-1}=\Lambda$ 得 $R_2=\Lambda R_1$. 故 $(R_2)_{jj}=\sum_k \Lambda_{jk}(R_1)_{kj}=\Lambda_{jj}(R_1)_{jj}=-(R_1)_{jj}$

但 $(R_1)_{jj}$ 与 $(R_2)_{jj}$ 由构造都大于0，矛盾.

因此 $\Lambda_{ii}=1$, $i=1,2,\cdots,n$ 即 $\Lambda=I$. 因此 $Q_2^{-1}Q_1=R_2R_1^{-1}=I$,

即 $Q_2=Q_1$, $R_2=R_1$，即QR分解唯一.

1. 设 A 是秩为 n 的 $m \times n$ 矩阵, 在 Matlab 里面, $[Q, R] = qr(A)$ 命令得到一个方阵 Q 和一个 $m \times n$ 的矩阵 R:

$$\text{MATLAB 得到的因子为 } (m \times m)(m \times n) \quad A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Q 的前 n 列 Q_1 是矩阵 A 的哪个基本子空间的一组标准正交基？

(b) Q 的后 $m-n$ 列 Q_2 是矩阵 A 的哪个基本子空间的一组标准正交基？

(b)问的思路

$A =$ 

有n个L.ind. m维向量

$\Downarrow$ 正交化 归一化

Q_1 $m \times n$ 矩阵, 每一列正交归一

注意到 $\mathbb{R}^m = \underbrace{C(A)}_{} \oplus \underbrace{N(A^T)}_{}$

Q_1 是 $C(A)$ 标准正交基 $\qquad$ Q_2 是 $N(A^T)$ 标准正交基

由 $C(A)$, $N(A^T)$ 互相正交, 有 $[Q_1 \ Q_2]$ 是正交矩阵.

A的列向量落在 $C(A)$ 中, 在 $N(A^T)$ 上分量是0, 这是 $\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ 中的0矩阵的来源.