15. The space of all 2 by 2 matrices has the four basis "vectors"

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

For the linear transformation of *transposing*, find its matrix A with respect to this basis. Why is $A^2 = I$?

记 $M_{2\times2}$ 为所有2x2矩阵构成的线性空间.

$$T: M_{2\times2} \longrightarrow M_{2\times2}$$
$$M \longmapsto M^T \quad .$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

记 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} =: v_1$, $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} =: v_2$, $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} =: v_3$, $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} =: v_4$.

$$T[v_1\ v_2\ v_3\ v_4] = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

1. What matrix has the effect of rotating every vector through 90° and then projecting the result onto the x-axis? What matrix represents projection onto the x-axis followed by projection onto the y-axis?

$\mathbb{R}^2$ 标准基下

最先做的变换放右边

旋转90°的矩阵 $A = \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

投影到x轴由 $P_x = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$.

两个线性映射的复合对应于矩阵乘法 $P_x \cdot A = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}$

投影到y轴 $P_y = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$. $P_y P_x = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

50. (Recommended) Suppose all vectors x in the unit square $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$ are transformed to Ax (A is 2 by 2).

(a) What is the shape of the transformed region (all Ax)?

(b) For which matrices A is that region a square?

(c) For which A is it a line?

(d) For which A is the new area still 1?

(a) 平行四边形. 例 $\rightsquigarrow$ $\begin{bmatrix}1&1/\sqrt2\\0&1/\sqrt2\end{bmatrix}$

线 .例 $\rightsquigarrow$ $\begin{bmatrix}1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1/\sqrt2&1/\sqrt2\end{bmatrix}$

点 .例 $\rightsquigarrow$ $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 只需变换后的两个向量垂直且两个向量有相同模长

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$变换后的坐标　　$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$变换后的坐标.

① $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$

② $a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2$

(c) 只需变换后向量在同一条线上.

i) $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = 0$, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

ii) $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = 0$

iii) $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 0$

(d) $\left|\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right| = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = 1$

补充:

4. 设 A 为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) 如果 P 为一个 3×3 的可逆矩阵, Q 为一个 4×4 的可逆矩阵. 证明

$$\operatorname{rank} PAQ = 2.$$

(b) 求一个 3×3 的可逆矩阵 P 和一个 4×4 的可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

这里的 O 都表示相应的零矩阵.

(a) 左、右乘可逆阵不改变秩. $r(PAQ) = r(A) = 2$.

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}]{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{bmatrix}]{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}]{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1 & -2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

下做初等列变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 3C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \to -C_1 + C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_4 \to C_4 - C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

先做的行变换写最右边

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/3 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

先做的列变换写最右边

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \le \underset{\text{A的列 B的行}}{n} + \mathrm{rank}(AB)$ 结论记住.
  证明技巧性强，略.

- 考虑

  $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},\ v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix},\ v_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix},\ v_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

  (a) 找出 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 的一个极大线性无关组.

  (b) 将其余向量表示为该极大线性无关组的线性组合.

按列排则做列变换，中途<u>不做换列</u>操作.

按行排则做行变换，中途<u>不做换行</u>操作.

• 秩1矩阵：任何秩1矩阵形如 $A=uv^T$，如 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} [2\ 1\ 1]$

Why? 秩1矩阵形如 $\begin{bmatrix} w \\ k_1 w \\ k_2 w \\ \vdots \\ k_n w \end{bmatrix}$ 其中w是一个行向量，$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$

(选定一个行向量，其余行是其 k_i 倍) $\begin{bmatrix} w \\ k_1 w \\ \vdots \\ k_n w \end{bmatrix} = \underset{\text{列向量}}{\begin{bmatrix} 1 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}} \underset{\text{行向量}}{w} =: u\, v^T$ $\left(v^T = w,\ u = \begin{bmatrix} 1 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \right)$

• 四个子空间 $C(A)$, $C(A^T)$, $N(A)$, $N(A^T)$

$C(A) = \mathrm{span}(A_1, \dots, A_n)$, $A = [A_1, \cdots, A_n]$

$C(A^T) = \mathrm{span}(B_1, \dots, B_n)$, $A^T = [B_1, \cdots, B_n]$

$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$

$N(A^T) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^T x = 0\}$

• 初等行变换与行空间（列情况类似）

△ 初等行变换是把行向量换成线性表出的向量（如 $R_1 \to kR_1$, $R_1 \to R_1 + R_2$）

△ 主元所在列就是行空间的基.

- 四个子空间之间的关系

定义：设U, W是V的子空间. $U+W:=\{u+w \mid u\in U, w\in W\}$.

[prop] $U+W$是子空间.

定义：若$U+W$中任意元素能唯一地表示成U与W中元素相加，则称$U+W$为U与W的直和，相应地，记号$U+W$换成$U\oplus W$.

[Fact] $U+W$是U与W的直和当且仅当 $U\cap W=0$

[prop] A是 $m\times n$ 矩阵.

(i) $C(A^T)\oplus N(A)=\mathbb{R}^n$

(ii) $C(A)\oplus N(A^T)=\mathbb{R}^m$

pf:

令$A=\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}$，则$A^T=[A_1^T \cdots A_m^T]$. 对$\forall x\in N(A)\cap C(A^T)$，则 $Ax=0$

有 $\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}A_1\cdot x\\ \vdots\\ A_m\cdot x\end{bmatrix}=0$ 即 $A_i\cdot x=(A_i^T)^T\cdot x=0$. 故 x与A_i^T正交，

即x与$C(A^T)$的基正交. 于是 x与$C(A^T)$中的所有向量正交. 特别地，

x与自己正交.

[Fact] $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $x^Tx=0 \Rightarrow x=0$.

因此 $x=0$. 故 $N(A)\cap C(A^T)=0$. 故 $N(A)$与$C(A^T)$是直和. □

[Fact] $\dim U\oplus W=\dim U+\dim W$

故 $\dim N(A)=\dim\mathbb{R}^n-\dim C(A^T)=n-r(A)$; $\dim N(A^T)=\dim\mathbb{R}^m-\dim C(A)=m-r(A)$.

[prop] A的列线性无关 $\Leftrightarrow N(A)=0$

Pf: $\Rightarrow$ 假定A的列线性无关. 设$A=[A_1,\cdots,A_n]$. 若$\exists\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\neq 0$

s.t. $A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=0$，则 $\exists x_i\neq 0$ s.t. $A_1x_1+A_2x_2+\cdots+A_nx_n=0$,

即 $\{A_1,\cdots,A_n\}$ l.d. $\Rightarrow\Leftarrow$. 故不存在$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\neq 0$是$Ax=0$的解，即 $N(A)=0$

$\Leftarrow$ $A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=0$ 只有 $x_1=\cdots=x_n=0$ 一个解. 即

$A_1x_1+\cdots+A_nx_n=0$只有 $x_1=\cdots=x_n=0$ 一个解.

• 线性空间的几何信息

Recall：线性空间是集合上装备加法与数乘. 加法与数乘两种运算都不能反映向量的几何信息.

Rmk：[几何信息] 几何回答的问题包括 什么是长度？什么是角度？

与之相对的是

[拓扑信息] 拓扑不关心什么是长度什么是角度，拓扑关心的是几何体在同伦等价意义下的分类.

从这节课开始我们在线性空间中加内积结构，就可以计算线性空间的几何信息.

• 线性空间上的内积

[定义] 设 V, W 是两个线性空间，定义集合 $V\times W := \{(v, w) \mid v\in V, w\in W\}$

[例] $V\times V := \{(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in V\}$

Rmk：(v_1, v_2) 是有序对，注意 $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$.

[定义]：令 V 是一个线性空间. 称 $p: V\times V \to \mathbb{R}$ 是一个双线性函数，

若 ① $p(sv_1+lv_2, w) = sp(v_1, w) + lp(v_2, w)$

② $p(v, sw_1+lw_2) = sp(v, w_1) + lp(v, w_2)$

[定义]：令 V 是一个线性空间. 称双线性函数 $d: V\times V \to \mathbb{R}$ 是 V 上的内积

若 ① $p(x, x) \geq 0$，等号成立当且仅当 $x=0$（正定性）

② $d(x, y) = d(y, x)$ （对称性）

赋予内积的线性空间是内积空间.

△利用内积计算几何信息.

定义向量 $v\in V$ 的长度 $\|v\| = \sqrt{p(v, v)}$

定义两个向量 v_1, v_2 之间的距离为 $\|v_1 - v_2\| = \sqrt{p(v_1-v_2, v_1-v_2)}$

定义两个向量间的夹角 $\theta(v_1, v_2) = \arccos \frac{p(v_1, v_2)}{\|v_1\| \|v_2\|}$ （回忆高中内容）

* 以上是抽象理论，我们把这套理论往具体线性空间 $\mathbb{R}^n$ 上套.

• [定义] $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$，定义 $p_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x, y) \longmapsto x^T y$$

△ Check: 1. p_n 是双线性函数

$p_n(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = (\alpha x_1 + \beta x_2)^T y = \alpha x_1^T y + \beta x_2^T y = \alpha p_n(x_1, y) + \beta p_n(x_2, y)$

…… 第二个位置验证略

2. p_n 具有对称性.

$$p_n(x, y) = x^T y = y^T x = p_n(y, x)$$

3. p_n 具有正定性

$$p_n(x, x) = 0 \Rightarrow x^T x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

因此我们定义的映射 $p_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 真的是 $\mathbb{R}^n$ 上的内积.

△ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x^T x}$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|x - y\| = \sqrt{(x-y)^T (x-y)}$

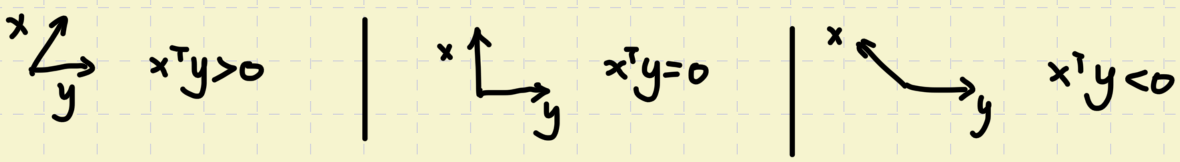
$$\theta(x, y) = \arccos \frac{x^T y}{\|x\| \|y\|}$$

• <u>正交性</u>

[定义] $x, y \in V$. 称 x, y 正交 $\Leftrightarrow x^T y = 0$.

Rmk: $\theta(x, y) = \arccos \frac{x^T y}{\|x\| \|y\|} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$，即正交的几何含义.

△ 若 $x^T y > 0$，则两个向量夹角小于 90°；若 $x^T y < 0$ 则两个向量夹角大于 90°



△ 口号：互相正交的向量组中的向量线性无关.

[prop] $v_1, \cdots, v_k$ 互相正交，则它们 L.ind.

pf: 令 $c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_kv_k=0$ (*) 两边同时左乘 v_i^T，得

$$c_1v_1^Tv_1+c_2v_1^Tv_2+\cdots+c_kv_1^Tv_k=0. \quad L.H.S=c_1v_1^Tv_1=R.H.S=0$$

利用内积的正定性，由 $v_1\neq 0$ 得 $v_1^Tv_1\neq 0$. 故 $c_1=0$. 同理，把 v_i^T 左乘到 (*) 式可得 $c_i=0$. 故 $v_1,\cdots,v_k$ L. ind.

• 正交子空间

[定义] 令 $V,W\subseteq\mathbb{R}^n$ 是两个子空间. 称 V 与 W 是正交的，若 $\forall v\in V, w\in W$，有 $v^Tw=0$，记作 $V\perp W$.

△ $N(A)\oplus C(A^T)=\mathbb{R}^n$, $N(A)\perp C(A^T)$

$N(A^T)\oplus C(A)=\mathbb{R}^m$, $N(A^T)\perp C(A)$.

Figure 3.4

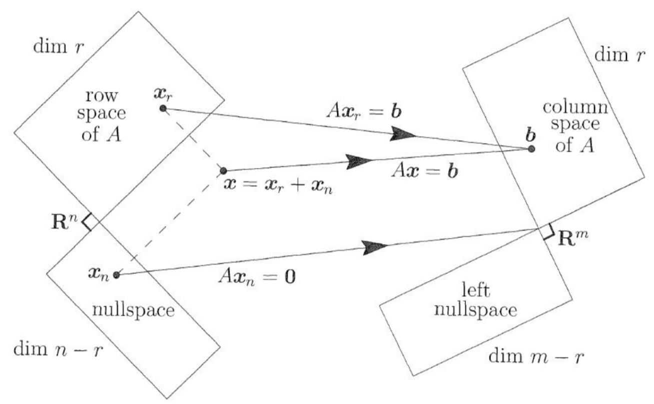


Figure 3.4: The true action $Ax=A(x_{\text{row}}+x_{\text{null}})$ of any m by n matrix.

△ 令 A 是 $m\times n$ 矩阵. 有两个线性映射.

① $L_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (L_A 中 L 表示 left, L_A 是左乘 A)

$x \longmapsto Ax$

Details: $\forall x\in\mathbb{R}^n=N(A)\oplus C(A^T)$. 由直和的性质($\mathbb{R}^n$ 中任何向量可以唯一表示成 x_n+x_r , $x_n\in N(A)$, $x_r\in C(A^T)$)，设 $x=x_n+x_r$, $x_n\in N(A), x_r\in C(A^T)$.

$$L_Ax=Ax=A(x_n+x_r)=Ax_n+Ax_r=0+Ax_r=Ax_r=L_Ax_r$$

Recall: $A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=[A_1\cdots A_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=x_1A_1+\cdots+x_nA_n\in C(A)$

故 $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $L_Ax=Ax_r\in C(A)$.

除此外 $L_Ax=L_Ax_r$ 意味着变换 x 等于变换 x 在行空间投影 x_r.

Rmk: $\dim C(A)=\dim C(A^T)$ 的一个证明(超纲)

$\ker L_A=N(A)$. $\operatorname{Im}L_A=C(A)$. Then $C(A)=\operatorname{Im}L_A\cong\mathbb{R}^n/\ker L_A=\mathbb{R}^n/N(A)=C(A^T)$

So $\dim C(A)=\dim C(A^T)$.

② $R_A:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$ (R_A 中 R 表示 right, R_A 表示右乘)

$y\longrightarrow y^TA$

Details: $\forall y\in\mathbb{R}^m=N(A^T)\oplus C(A)$, 我们有 $y=x_n+x_c$,

$x_n\in N(A^T)$, $x_c\in C(A)$.

$R_Ay=y^TA=(x_n+x_c)^TA=x_n^TA+x_c^TA=x_c^TA=R_Ax_c$.

变换 $y\in\mathbb{R}^m$ 等于变换 y 在列空间的投影 x_c. $R_Ay=x_c^TA=(A^Tx_c)^T\in C(A^T)$

- Schwarz Inequality $|a^Tb|\le\|a\|\,\|b\|$

$|a^Tb|=\|a\|\,\|b\|\,|\cos\theta|$, $|\cos\theta|\le1$, so $|a^Tb|\le\|a\|\,\|b\|$.

等号成立 $\Leftrightarrow|\cos\theta|=1\Leftrightarrow a,b$ 共线 $\Leftrightarrow a=\lambda b$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

- $a,b\in\mathbb{R}^n$. b 往 a 所在直线上的投影是

$$\boxed{p(b)=\hat{x}a=\frac{a^Tb}{a^Ta}a}$$

($a^Tb=\|a\|\cdot b$ 在 a 方向上的长度

$a^Ta=\|a\|^2$.

$\frac{a^Tb}{a^Ta}a=\frac{\cancel{\|a\|}\cdot b\text{在}a\text{方向上的长度}}{\|a\|}\cdot\underbrace{\frac{a}{\|a\|}}_{a\text{方向的单位向量}}$

cancel

$=b$ 在 a 方向上的长度 $\cdot\hat{a}$.)

△ $p(b)=\underbrace{\frac{a^Tb}{a^Ta}}_{\text{数字}}\underbrace{a}_{\mathbb{R}^n}=a\frac{a^Tb}{a^Ta}=\underbrace{\frac{aa^T}{a^Ta}}_{\text{矩阵}}\cdot\underbrace{b}_{\text{向量}}$.

$\frac{aa^T}{a^Ta}$ 是投影矩阵

△ 投影矩阵是对称矩阵 $\left(\frac{aa^T}{a^Ta}\right)^T=\frac{aa^T}{a^Ta}$.

• 若 $b\notin C(A)$，则 $Ax=b$ 无解. 此时最好的关于解的近似是使得 $\|Ax-b\|^2$ 最小的 x. 但是从取极小长度入手并不简单，我们把 $\|Ax-b\|^2$ 取最小值化归到别的问题.

列空间中的元素形如Ax

$\|Ax-b\|^2$ 在 $x=\hat{x}$ 时最小 $\Leftrightarrow$ $A\hat{x}$ 是 b 在列空间的投影

$$\Updownarrow$$

$$A^T(b-A\hat{x})=0 \Leftrightarrow b-A\hat{x}\in N(A^T) \underset{C(A)\perp N(A^T)}{\Longleftrightarrow} (b-A\hat{x})\perp C(A)$$

即 $A^Tb=A^TA\hat{x}$. 若 A^TA 可逆，则 $\hat{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$.

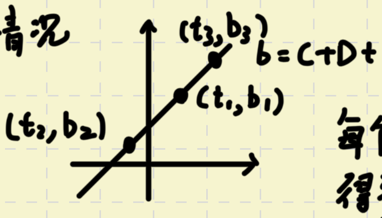
于是 b 在 $C(A)$ 的投影 $A\hat{x}=A(A^TA)^{-1}A^Tb=Pb$，其中 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$ 是投影矩阵.

[Fact] P 是投影矩阵 $\Leftrightarrow$ P 对称且满足 $P^2=P$

[Application] 如何对实验数据进行拟合?

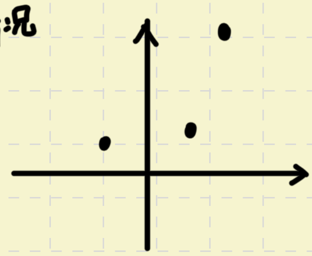
假设 input 是 t，output 是 b，b 与 t 之间满足 $b=C+Dt$.

理想情况



每个数据点都落在一条直线上，则可通过求直线方程得到 $b=C+Dt$. $(C,D\in\mathbb{R})$

实际情况



数据并不严格落在一条直线上.

问题:如何选择 $\hat{C},\hat{D}$ 来描述 $b=\hat{C}+\hat{D}t$?

令 $\vec{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$，$\vec{t}=\begin{bmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{bmatrix}$ 这是进行n次实验的结果.(注意 $\vec{b}$ 与 $\vec{t}$ 都是已知的实向量，不是未知量).

重述问题:

$\vec{b}=\begin{bmatrix}1 & t_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & t_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \hat{D}\end{bmatrix}$ 这个方程无解，但我们希望找最优解.

在这里 $A=\begin{bmatrix}1 & t_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & t_n\end{bmatrix}$. 同理，$A^T\left(b-A\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \hat{D}\end{bmatrix}\right)=0 \Rightarrow A^Tb=A^TA\begin{bmatrix}\hat{C}\\ \hat{D}\end{bmatrix}$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{bmatrix} \qquad A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=1}^n t_i b_i \end{bmatrix}$$

因此,我们只需解方程($\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix}$是未知量)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n b_i \\ \sum_{i=1}^n t_i b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i & \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{D} \end{bmatrix}.$$

- 作业

- 5. The space M of 2 by 2 matrices has the basis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suppose T multiplies each matrix by $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, i.e., $T(X) = AX$. Find the matrix representing this linear transformation T with respect to the above mentioned basis.

$$\mathcal{A}[x_1 \cdots x_n] = [x_1 \cdots x_n] \begin{bmatrix} \text{展开系数} & \text{按列排布} \end{bmatrix}$$

- [Fact] A的列 L.ind.,则 A^TA 是可逆的.

4. Let

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

(a) Find the projection matrix P_C onto the column space of the matrix A.

(b) Find the 3×3 projection matrix P_R onto the row space of A.

(c) Multiply $B = P_C A P_R$. Your answer B should be a bit surprising–can you explain it?

(a)

$C(A) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$, 令 $A' = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$P_C = A'(A'^TA')^{-1}A'^T = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$$

1. 已知三阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c), a,b,c 不全为零, 矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$$

(k 为常数), 且 $AB=O$ (这里的 O 是 3 阶零矩阵), 求线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的通解.

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}\xrightarrow[C_3\to C_3-3C_1]{C_2\to C_2-2C_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\3&0&k-9\end{bmatrix}$$

由 Problem set 5 T3, $r(A)+r(B)\leq 3+r(AB)=3$ (*)

i) 若 $k\neq 9$, 则 $r(B)=2$. (*)代入 $r(B)=2$ 得 $r(A)\leq 1$. 又由 A 第1行不全为零得 $r(A)\geq 1$. 故 $r(A)=1$, 于是 $\dim N(A)=3-1=2$.

由 $AB=0$ 知 $C(B)\subseteq N(A)$. $\begin{cases}\dim C(B)=r(B)=2=\dim N(A)\\ C(B)\subseteq N(A)\end{cases}\Rightarrow N(A)=C(B)$.

故 A的解为 $\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\6\\k\end{bmatrix}\right)=\left\{l\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\6\\k\end{bmatrix}\ \middle|\ l,t\in\mathbb{R}\right\}$.

ii) 若 $k=9$, 则 $r(B)=1$. 记 $B=[B_1\ \ 2B_1\ \ 3B_1]$, 其中 $B_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

已知 $AB=0$ 即 $A[B_1\ \ 2B_1\ \ 3B_1]=[AB_1\ \ 2AB_1\ \ 3AB_1]=0$. 特别地, $AB_1=0$.

因此 $B_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\in N(A)$.

(ii.i) 若 $r(A)=2$, 即 $\dim N(A)=3-2=1$, 则 $N(A)=\left\{l\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\ \middle|\ l\in\mathbb{R}\right\}$.

(ii.ii) 若 $r(A)=1$ 此时 $Ax=0$ 的解即是如下方程的解

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.\qquad (\mathrm{I})$$

a,b,c 不全为0, 不妨设 $a\neq 0$. 则 方程(I) 的解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{b}{a}x_2-\frac{c}{a}x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix}-b/a\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{bmatrix},\quad x_2,x_3\in\mathbb{R}.$$

综上, 若 $k\neq 9$, 解为 $l\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\6\\k\end{bmatrix}$ $l,t\in\mathbb{R}$

若 $k=9$ $\begin{cases}r(A)=2\ \text{则解为}\ l\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ l\in\mathbb{R}\\ r(A)=1\ \text{则解为}\ s\begin{bmatrix}-b/a\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-c/a\\0\\1\end{bmatrix},\ s,t\in\mathbb{R}\end{cases}$