Week 6 讲稿

1. ind. 线性无关

$\Rightarrow \Leftarrow$ 反证法出现矛盾

• V是线性空间, $v_1, \cdots, v_k \in V$. 若 $v_1 = a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$, $a_i \in \mathbb{R}$, 则称 v_1 被 $\{v_2, \cdots, v_k\}$ 线性表出.

△线性表出的例子: ① $v_1 = v_2 + v_3$, $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$. ② $v_1 = -v_2 + v_3$.

△线性表出和张成(span)的联系.

回忆定义 $\mathrm{span}(v_1, \cdots, v_k) := \{a_1v_1 + \cdots + a_kv_k \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, 其上定义加法与数乘

加法 $(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) + (b_1v_1 + \cdots + b_kv_k) := (a_1+b_1)v_1 + \cdots + (a_k+b_k)v_k$

数乘 $k\cdot(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) := (ka_1)v_1 + \cdots + (ka_k)v_k$

容易证明 $\mathrm{span}(v_1, \cdots, v_k)$ 在定义的加法与数乘下构成一个线性空间(证八大条)

结合线性表出的含义, 空间 $\mathrm{span}(v_1, \cdots, v_k) = \{$所有可以用 $v_1, \cdots, v_k$ 线性表出的向量$\}$

• 定义: 向量组 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 称为线性无关, 若 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 满足

$$\forall\ c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

△ $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 线性相关, 若 $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 满足

对 $\forall\ c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k = 0$, 必存在 $c_i \neq 0$.

Rmk: 若 $c_1 \neq 0$, 则 $v_1 = -\frac{c_2}{c_1}v_2 - \cdots - \frac{c_k}{c_1}v_k$, 即 v_1 可以被 $v_2, \cdots, v_k$ 线性表出.

△ $\{v_1, \cdots, v_k\}$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 0用 $v_1, \cdots, v_k$ 线性表出表达式唯一, 只有 $0 = 0v_1 + \cdots + 0v_k$

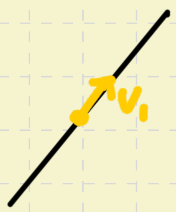
定义: 向量组 $A \subseteq$ 向量组 B. 称 A 是 B 的极大线性无关组, 若

① A中的向量线性无关 ② B中的所有向量可由A中的向量线性表出.

Quiz: 如何理解定义中的极大? (在 B 中选择向量使得张成的空间最大.)

• $\mathrm{span}(v_1, \cdots, v_k)$ 的图像.

取 $k=1$, $\mathrm{span}(v_1)$

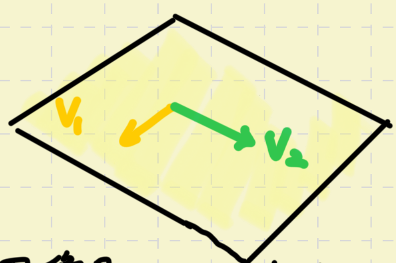


图像是 v_1 所在直线

v_1 可以线性表出的所有向量构成的空间是 v_1 所在的直线.

取 $k=2$, $\mathrm{span}(v_1, v_2)$

假定 v_1, v_2 线性无关

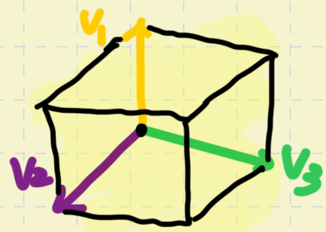


图像是 v_1, v_2 所在的平面.

v_1, v_2 可以线性表出的所有向量构成的空间是 v_1, v_2 所在的平面.

取 $k=3$, $\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$

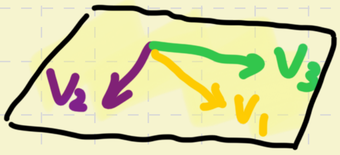
假定 v_1, v_2, v_3 线性无关



整个三维空间

为什么可以假定 v_1, v_2, v_3 线性无关？

和只有一个线性无关的向量一样.



和只有两个线性无关的向量一样.

设 L 是 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 的极大线性无关组，则 $\mathrm{span}(L) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_k)$.

[prop] $\{v_1, \dots, v_k\}$, $\{w_1, \dots, w_l\}$ 是两个向量组. 若 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 能被 $\{w_1, \dots, w_l\}$ 线性表出，则 $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k) \subseteq \mathrm{span}(w_1, \dots, w_l)$

pf: 任给 $v \in \mathrm{span}(v_1, \dots, v_k)$，则 $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$. 由于 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 能被 $\{w_1, \dots, w_l\}$ 线性表出，则 $v_i = b_{i1} w_1 + \dots + b_{il} w_l = \sum b_{ij} w_j$. 故

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = a_1 \sum_j b_{1j} w_j + a_2 \sum b_{2j} w_j + \dots + a_k \sum b_{kj} w_j$$

写成 $w_1, \dots, w_l$ 的线性组合，因此 $v \in \mathrm{span}(w_1, \dots, w_l)$.

口号: A向量组被B向量组线性表出，则B的表示能力强，因此 $\mathrm{span}(B) \supseteq \mathrm{span}(A)$ (空间上 $\mathrm{span}(B)$ 大于 $\mathrm{span}(A)$)

[prop] 令 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 是 $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m\}$ 的极大线性无关组，则 $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_m)$.

pf: 显然 $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k) \subseteq \mathrm{span}(v_1, \dots, v_m)$. 由于 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 是极大线性无关组，因此 $\{v_1, \dots, v_m\}$ 可以被 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 线性表出. 因此 $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k) \supseteq \mathrm{span}(v_1, \dots, v_m)$.

口号: 在张成空间的时候，可以精简向量，只考虑表示能力最强的向量，即极大线性无关组.

[prop] $v_1, \dots, v_k \in U \subseteq V$，则 $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k) \subseteq U$.

pf: U 是子空间对加法与数乘封闭，故 $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_k) = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_i \in \mathbb{R}\} \subseteq U$.

口号: 向量组张成的空间不会超过向量组所在的空间.

- 线性表出的唯一性.

已知 $v \in V$ 可由 V 中的向量组 $\{v_1, \dots, v_k\}$ 线性表出，即存在系数 a_i，使得 $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$, $a_i \in \mathbb{R}$. 问什么时候线性表出的表达式是唯一的?

[prop] 表达式唯一 $\Leftrightarrow$ $\{v_1, \dots, v_k\}$ 线性无关.

(理解: 为什么这个prop在直觉上是正确的? $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$ 这个表达式的**唯一性**来源于 0 的线性展开 $0 = b_1 v_1 + \dots + b_k v_k$ 的唯一性.
先 Fix 一组系数 $a_1, \dots, a_k$，则 $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + 0 = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + b_1 v_1 + \dots + b_k v_k$ (这部分不唯一则整体表达式不唯一)

pf: $\Rightarrow$ 假定存在唯一 a_i s.t. $v=a_1v_1+\cdots+a_kv_k$. w.t.s. $\{v_1,\cdots,v_k\}$ L.ind.

任意 $c_1v_1+\cdots+c_kv_k=0$ (*), w.t.s. $c_1,\cdots,c_k=0$. 假设存在 $c_i\neq 0$, s.t. (*) 成立.

不妨设 $c_1\neq 0$. 故 $v=a_1v_1+\cdots+a_kv_k=a_1v_1+\cdots+a_kv_k+0=a_1v_1+\cdots+a_kv_k+c_1v_1+\cdots+c_kv_k$

$=(a_1+c_1)v_1+\cdots+(a_k+c_k)v_k$.

我们找到两个 v 的表达式 $\begin{cases} v=a_1v_1+\cdots+a_kv_k \\ v=(a_1+c_1)v_1+\cdots+(a_k+c_k)v_k \end{cases}$, 由于 $c_i\neq 0$, $a_i+c_i\neq a_i$,

故两个表达式不同 $\rightarrow\leftarrow$, 因此 (*) 中 $\forall c_j=0$.

$\Leftarrow$ 假定 $v_1,\cdots,v_k$ 线性无关, w.t.s. $v=a_1v_1+\cdots+a_kv_k$ 表达式唯一.

假设 v 的表达式不唯一, 设 $\begin{cases} v=a_1v_1+\cdots+a_kv_k & (1) \\ v=a_1'v_1+\cdots+a_k'v_k & (2) \end{cases}$ 是两个不同表达式, 即

存在 i s.t. $a_i\neq a_i'$. (1) 减 (2) 得 $0=(a_1-a_1')v_1+\cdots+(a_k-a_k')v_k$.

由于 $a_i\neq a_i'$, 系数 $a_i-a_i'\neq 0$, 与 $v_1,\cdots,v_k$ 线性无关矛盾. 故 $\{v_1,\cdots,v_k\}$ 线性无关.

口号: 用线性无关的向量组线性表出, 则表达式唯一.

• 线性空间的基与维数.

口号: 基是线性空间 V 的极大线性无关组.

定义: $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 中的向量组. 若 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 满足

① $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 线性无关. ② V 中任何向量可以被 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 线性表出.

Δ 口号: 基的选取不唯一.

例如 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基, $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ 也是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基.

☆ [prop] $\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 称为标准基. (未说明默认基是标准基)

pf: ① w.t.s. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}$ 线性无关.

$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots c_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=0$, 则 $c_1=\cdots=c_n=0$, 得证.

② w.t.s. $\forall\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$ 可被此向量组线性表出,

有 $\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$, 因此得证.

Δ 基的选取不唯一，但是不同基包含相同向量数.

[prop] 设 $\{w_1,\dots,w_n\}$ 与 $\{v_1,\dots,v_m\}$ 是 V 的两组基，则 $n=m$.

pf: 假设 $m\neq n$. 不妨设 $m>n$

(Idea: 证明 $\{v_1,\dots,v_m\}$ 线性相关，与题设矛盾)

$\{w_1,\dots,w_n\}$ 是一组基，故 $v_i=\sum a_{ij}w_j$. $1\le i\le m$, $1\le j\le n$

对 $\sum c_k v_k=0$，有 $\sum c_k\sum a_{kj}w_j=0$ 即 $\sum_j(\sum_k c_k a_{kj})w_j=0$. $\{w_j\}$ 是基，故 $\{w_j\}$ 线性无关，因此 $\sum_k c_k a_{kj}=0$, $\forall j$. 将 $\sum_k a_{kj}c_k=0$ 视作以 $\{c_i\}$ 为未知量的线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}=0$$

. 由于 $m>n$，方程组有非零解.

故 $\{v_1,\dots,v_m\}$ l.d. □

Δ 扩基定理：设 $\{v_1,\dots,v_m\}\subseteq V$ 线性无关，则可在 V 中选取向量 $v_{m+1},\dots,v_n$, s.t. $\{v_1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_n\}$ 构成 V 的一组基.

pf: 若 $\mathrm{span}(v_1,\dots,v_m)\neq V$，则取 $v_{m+1}\in V-\mathrm{span}(v_1,\dots,v_m)$. 由 span 定义，易知 v_{m+1} 与 $\{v_1,\dots,v_m\}$ 线性无关. 考虑 $\mathrm{span}(v_1,\dots,v_m,v_{m+1})$. 若 $\mathrm{span}(v_1,\dots,v_m,v_{m+1})=V$ 则我们扩充得基 $\{v_1,\dots,v_m,v_{m+1}\}$，若不然则继续进行上述步骤. 由于 $\dim V$ 有限，有限步后可得基.

Δ 推论：设 $\dim V=n$, $m>n$. 则 m 个向量构成的向量组必定线性相关.

pf: 假设 m 个向量 $\{v_1,\dots,v_m\}$ 线性无关，则可将此向量组扩充为 V 的一组基 $\{v_1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_k\}$, $k\ge m$. 由于基中向量个数 $k=n$，有 $k\ge m$. 因此 $k=m$. 又有 $m>n$，因此 $k>n$，与 $k=n$ 矛盾. 因此 $\{v_1,\dots,v_m\}$, $m>n$ 线性相关.

Δ 定义：$\dim V :=$ V 的任一组基包含的向量数.

Δ $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\dots\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，故 $\dim\mathbb{R}^n=n$.

• 四个子空间 $C(A)$, $C(A^T)$, $N(A)$, $N(A^T)$

$C(A)=\mathrm{span}(A_1,\dots,A_n)$, $A=[A_1,\cdots,A_n]$

$C(A^T)=\mathrm{span}(B_1,\dots,B_n)$, $A^T=[B_1,\cdots,B_n]$

$N(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$

$N(A^T)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid A^Tx=0\}$

• 初等行变换与行空间 (列情况类似)

Δ 初等行变换是把行向量换成线性表出的向量 (如 $R_1\to kR_1$, $R_1\to R_1+R_2$)

Δ 主元所在列就是行空间的基.

- 四个子空间之间的关系

定义：设U,W是V的子空间. $U+W:=\{u+w \mid u\in U, w\in W\}$.

[prop] $U+W$是子空间.

定义：若$U+W$中任意元素能唯一地表示成U与W中元素相加，则称$U+W$为U与W的直和，相应地，记号$U+W$换成$U\oplus W$.

[Fact] $U+W$是U与W的直和当且仅当 $U\cap W=0$

[prop] A是$m\times n$矩阵.

(i) $C(A^T)\oplus N(A)=\mathbb{R}^n$

(ii) $C(A)\oplus N(A^T)=\mathbb{R}^m$

pf:

令$A=\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}$，则$A^T=[A_1^T \cdots A_m^T]$. 对$\forall x\in N(A)\cap C(A^T)$，则 $Ax=0$

有 $\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}A_1\cdot x\\ \vdots\\ A_m\cdot x\end{bmatrix}=0$ 即 $A_i\cdot x=(A_i^T)^T\cdot x=0$. 故$x$与$A_i^T$正交，

即x与$C(A^T)$的基正交. 于是x与$C(A^T)$中的所有向量正交. 特别地，x与自己正交.

[Fact] $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $x^Tx=0\Rightarrow x=0$.

因此 $x=0$. 故$N(A)\cap C(A^T)=0$. 故$N(A)$与$C(A^T)$是直和. $\square$

[Fact] $\dim U\oplus W=\dim U+\dim W$

故$\dim N(A)=\dim\mathbb{R}^n-\dim C(A^T)=n-r(A)$; $\dim N(A^T)=\dim\mathbb{R}^m-\dim C(A)=m-r(A)$.

[prop] A的列线性无关 $\Leftrightarrow N(A)=0$

Pf: $\Rightarrow$ 假定A的列线性无关. 设$A=[A_1,\cdots,A_n]$. 若$\exists \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\neq 0$

s.t. $A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=0$，则$\exists x_i\neq 0$ s.t. $A_1x_1+A_2x_2+\cdots+A_nx_n=0$,

即$\{A_1,\cdots,A_n\}$ l.d. $\Rightarrow\Leftarrow$. 故不存在$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\neq 0$是$Ax=0$的解，即$N(A)=0$

$\Leftarrow$ $A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=0$ 只有 $x_1=\cdots=x_n=0$ 一个解. 即

$A_1x_1+\cdots+A_nx_n=0$只有 $x_1=\cdots=x_n=0$ 一个解.

• 秩1矩阵：任何秩1矩阵形如 $A=uv^T$，如 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Why? 秩1矩阵形如 $\begin{bmatrix} w \\ k_1 w \\ k_2 w \\ \vdots \\ k_n w \end{bmatrix}$ 其中 w 是一个行向量，$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$

(选定一个行向量，其余行是其 k_i 倍) $\begin{bmatrix} w \\ k_1 w \\ \vdots \\ k_n w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}}_{\text{列向量}} \underbrace{w}_{\text{行向量}} =: u v^T$ $\left(v^T = w, \; u = \begin{bmatrix} 1 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \right)$

线性变换.

• 映射 $f: A \longrightarrow B$, $a \longmapsto b$ 表示 f 把集合A中的元素 a 映到集合B中的元素 b.

△ b 也记作 $f(a)$，沿用函数的记号.

例子 $f: \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$

$1 \longmapsto 2$

$2 \longmapsto 3$

$3 \longmapsto 1$

• 线性映射 $\mathcal{A}: V \longrightarrow W$, $v \longmapsto \mathcal{A}v$ 是特殊的映射.

[定义] 称 $\mathcal{A}: V \to W$ 是线性映射，若 $\forall k, l \in \mathbb{R}$，$\forall v_1, v_2 \in V$，

有 $\mathcal{A}(kv_1 + lv_2) = k\mathcal{A}v_1 + l\mathcal{A}v_2$.

△ $V \to V$ 线性<u>变换</u>　$V \to W$ 线性<u>映射</u>

• 令 V 是一个线性空间，$\{x_1, \dots, x_n\}$ 是 V 的一组基.

令 $\mathcal{A}: V \longrightarrow V$, $v \longmapsto \underline{\mathcal{A}v}$ 是一个线性变换

$\mathcal{A}v$ 是V中的一个向量.

既然 $\mathcal{A}v$ 是 V 中的向量，$\mathcal{A}v$ 可以用 V 的基 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 线性表出.

• 什么是线性映射在基下的矩阵？

考虑基 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 被变换 $\mathcal{A}$ 变换后的向量 $\mathcal{A}x_1, \dots, \mathcal{A}x_n$.

$\mathcal{A}x_1$ 可以被 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 线表，设 $\mathcal{A}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$

(换一种写法) $= [x_1 \cdots x_n]\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$

同样设 $\mathcal{A}x_2 = [x_1,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \cdots, \mathcal{A}x_n = [x_1 \cdots x_n]\begin{bmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$

故 $\mathcal{A}[x_1 \cdots x_n] = [\mathcal{A}x_1,\cdots,\mathcal{A}x_n] = [x_1 \cdots x_n]\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{bmatrix}}_{=A}$

写好看点 $\mathcal{A}[x_1 \cdots x_n] = [x_1 \cdots x_n]A$

矩阵 A 是线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $[x_1 \cdots x_n]$ 下的矩阵

Δ这个矩阵有什么用？

任意 $v \in V$，$v = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = [x_1,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$：$v$ 在基 $[x_1,\cdots,x_n]$ 下的坐标

$\mathcal{A}v = \mathcal{A}[x_1 \cdots x_n]\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [x_1 \cdots x_n]A\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

* 只要知道 A（对基求的矩阵）就知道任何向量 $v \in V$ 在变换下的 $\mathcal{A}v$ 在基下的坐标.

* Summary，在 V 中取定基后，任意 $v \in V$ 可用基下坐标表示. 设 v 的坐标是 $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

设线性变换 $\mathcal{A}$ 在基下的坐标是 A. 则 $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 在线性变换下变成坐标 $A\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$，表示向量 $[x_1 \cdots x_n]A\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$.

• 不同线性空间的情形

$$\mathcal{A}: \underset{n\text{-dim}}{V} \longrightarrow \underset{m\text{-dim}}{W}$$

令 $[x_1,\cdots,x_n]$ 是 V 的一组基

$[y_1,\cdots,y_m]$ 是 W 的一组基.

$\mathcal{A}x_1,\cdots,\mathcal{A}x_n \in W$ 故可用 W 的基 $[y_1,\cdots,y_m]$ 线表.

设 $\mathcal{A}x_i = \sum a_{ij}y_j$，则 $\mathcal{A}[x_1 \cdots x_n] = [y_1 \cdots y_m]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & & a_{nm} \end{bmatrix}$

口号：一个 n 维空间到 m 维空间的线性变换在基下的矩阵是一个 $m \times n$ 矩阵.（指 V 与 W 都选好基）

* Summary：在 V 与 W 中选定基后，V, W 中向量可用坐标表示. 设

线性变换 $\mathcal{A}: V\to W$ 在基下的矩阵是 A. 则 $\mathcal{A}$ 把 V 中坐标为
$\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$ 的向量变换成坐标为 $A\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$ 的 W 中的向量.

• 线性映射的复合对应矩阵乘法.

$$\underset{n}{V} \xrightarrow{\mathcal{A}} \underset{m}{W} \xrightarrow{\mathcal{B}} \underset{l}{U}$$

所有空间选好基

设 $\mathcal{A}$ 在基下矩阵为 A, A 是 $m\times n$ 矩阵; 设 $\mathcal{B}$ 在基下矩阵为 B, B 是 $l\times m$ 矩阵.
则 $\mathcal{B}\mathcal{A}$ 在基下矩阵为 $\underset{l\times m}{B}\cdot\underset{m\times n}{A}$. 这就是矩阵乘法的意义.

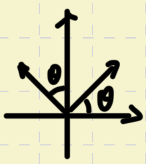
• $\mathbb{R}^n$ 中的线性变换 (默认基是 $\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\cdots\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$)

以 $\mathbb{R}^2$ 为例. 取 $\mathbb{R}^2$ 的基为 $e_1:=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $e_2:=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. 设 $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 是一个线性变换.
设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ 为 $\mathcal{A}$ 在基 $[e_1\ e_2]$ 下的矩阵. 向量 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$. 则 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 在基 $[e_1\ e_2]$
下的坐标还是 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, 因为 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1e_1+0e_2$. 故坐标 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 在 $\mathcal{A}$ 下变换为 $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}$
坐标 $\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}$ 表示向量 $a_{11}e_1+a_{21}e_2=\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}}_{\text{向量}}\in\mathbb{R}^2$.

口号: $\mathbb{R}^2$ 上线性变换 $\mathcal{A}$ 在矩阵下的坐标为 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$, 则线性变换 $\mathcal{A}$ 将
$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 变换为 $\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}$, 将 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 变换为 $\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix}$.

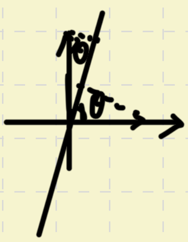
• 旋转矩阵

旋转 θ 角是将 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 变成 $\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$ 将 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 变成 $\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$.



故由口号, 旋转矩阵为 $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$

• 投影矩阵.



往夹角为 θ 的直线上投影, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 变成 $\begin{bmatrix}\cos^2\theta\\ \cos\theta\sin\theta\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 变成 $\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta\end{bmatrix}$. 故由口号, 投影矩阵为 $\begin{bmatrix}\cos^2\theta&\sin\theta\cos\theta\\ \cos\theta\sin\theta&\sin^2\theta\end{bmatrix}$

15. The space of all 2 by 2 matrices has the four basis "vectors"

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

For the linear transformation of *transposing*, find its matrix A with respect to this basis. Why is $A^2=I$?

记 $M_{2\times2}$ 为所有2x2矩阵构成的线性空间.

$$T: M_{2\times2} \longrightarrow M_{2\times2}$$

$$M \longmapsto M^T.$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

记 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=:V_1$, $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=:V_2$, $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=:V_3$, $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=:V_4$.

$$T[V_1\ V_2\ V_3\ V_4]=[V_1\ V_2\ V_3\ V_4]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

作业留到下次习题课讲

Quiz：1.写出《三体3》中二向箔所表示的线性变换在基下的矩阵.

2.定义：向量组 A⊆向量组B. 称A是B的极大线性无关组，若
①A中的向量线性无关　②B中的所有向量可由A中的向量线性表出..
问：如何理解定义中的"极大"?