Week4 讲稿.

• 若存在 B，使得 $AB=BA=I$，则称 B 是 A 的逆.　　$\frac{1}{A}$ ✗

只有方阵才有逆. 若 A 的 size 是 $m\times n$，则 $AB_R=I_m$，$B_LA=I_n$，$AB_R\neq B_LA$.
(之后会学到求逆公式，求逆公式中出现行列式，只有方阵才有行列式)

• $[A \vdots I]$ 怎么用?（其中 I 是单位阵）

$[A \vdots I]$ 可以同时左乘相同矩阵，这样<u>右边就可以记录所有左乘矩阵的乘积.</u>
(只是一种技巧)

如 $[A \vdots I] \longrightarrow [B\cdot A \vdots B] \longrightarrow [C\cdot BA \vdots CB] \longrightarrow \cdots [\ \ \vdots X]$

读右边，说明已经对 A 乘了 B 矩阵

读右边，说明已经对 A 乘了矩阵 CB

左边被小明弄脏了

读右边，说明小明已对 A 乘了 X.

• 高斯约旦方法.

Idea: $[A \vdots I] \xrightarrow{\text{如果找到 } A^{-1}} [A^{-1}A \vdots A^{-1}\cdot I] = [I \vdots A^{-1}]$. 我们不是一步找到 A^{-1}，而是找到一系列矩阵，乘积是 A^{-1}.

$[A \vdots I] \rightarrow [A_1A \vdots A_1] \longrightarrow [A_2A_1A \vdots A_2A_1] = [I \vdots A_2A_1]$

从 $A_2A_1A=I$ 可知 $A_2A_1=A^{-1}$.

Details:

△初等行变换等价于左乘某个矩阵

例子: $A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}$

① 交换第一行和第三行等价于左乘 $\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ （验算 $\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_3\\A_2\\A_1\end{bmatrix}$）

② 第二行乘上 λ 等价于左乘 $\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1\end{bmatrix}$ （验算 $\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1\\ \lambda A_2\\A_3\end{bmatrix}$）

③ 第二行 λ 倍加到第三行等价于左乘 $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & \lambda & 1\end{bmatrix}$ （验算 $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & \lambda & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\ \lambda A_2+A_3\end{bmatrix}$）

④ 第三行 λ 倍加到第二行等价于左乘 $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \lambda\\ & & 1\end{bmatrix}$ （验算 $\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \lambda\\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1\\ \lambda A_3+A_2\\A_3\end{bmatrix}$）

✱观察: (1) 如果是用**上**面的行消**下**面的行，所使用的初等行变换是**下**三角.
例如 $R_2\rightarrow R_2+\lambda R_1$，对应初等行变换矩阵是 $\begin{bmatrix} & & \\ \lambda & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$，是**下三角**

(2) 同理，如果是用**下**面的行消**上**面的行，所使用的初等行变换是**上三角**.

(3) 发生行交换则既**非**上三角，又**非**下三角.

△ 高斯-约旦方法求逆和 LU 分解

以下使用 L_i 表示某个下三角的初等行变换，U_i 表示某个上三角的初等行变换.

$$\text{Step I}: \underbrace{[A \vdots I] \xrightarrow{\text{上行消下行}} [L_1A \vdots L_1] \longrightarrow [L_2L_1A \vdots L_2L_1] \longrightarrow \cdots \longrightarrow}_{\text{一直用上行消下行最后使得左边变成上三角,记作}U} [U \vdots L_nL_{n-1}\cdots L_1]$$

$\|$ 下三角乘积是下三角

$[U \vdots L]$

(作为求逆的办法可以使用行交换,若要用此办法得到LU分解则不可使用行交换)(StepII同理)

*若U^{-1}存在 则 $[U \vdots L] \rightarrow [U^{-1}U \vdots U^{-1}L] = [I \vdots U^{-1}L]$ 当左边变成I,右边是A^{-1}.

$A^{-1} = U^{-1}L$ 即 $A = (U^{-1}L)^{-1} = L^{-1}U$ 这就是LU分解,分解成一个下三角乘上三角.

$$\text{Step II}: [U \vdots L] \xrightarrow{\text{用下行消上行}} [U_1U \vdots U_1L] \rightarrow \cdots \rightarrow [I \vdots U_mU_{m-1}\cdots U_1L] = [I \vdots U^{-1}L]$$

故 $A^{-1} = U^{-1}L$,即 $A = L^{-1}U$ 是LU分解.

总结:

①高斯约旦法求逆: $[A \vdots I] \xrightarrow[\text{(可换行)}]{\text{初等行变换}} [\ \ \vdots B] \xrightarrow[\text{(可换行)}]{\text{初等行变换}} \left[\begin{smallmatrix}1&&\\&1&\\&&\ddots\end{smallmatrix} \vdots C\right]$. 则 $A^{-1} = C$

②LU分解: 不是所有矩阵可以做LU分解,若用高斯约旦法求逆过程中没有使用行交换则有LU分解. 如果事先知道地做换行操作得到PA则可保证高斯约旦法不使用行交换,则PA有LU分解.

例子:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & & \\ 2 & 1 & 0 & & 1 & \\ & 1 & 1 & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to 3R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{3}R_3]{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to -2R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right]$$

U L

故 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$

- LDU 分解.

(1) LDU分解的形式是 $\underbrace{\begin{bmatrix}1&&\\&\ddots&\\ *&&1\end{bmatrix}}_{\text{对角为1的下三角}}\underbrace{\begin{bmatrix}*&&\\&\ddots&\\&&*\end{bmatrix}}_{\text{对角矩阵}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&&*\\&\ddots&\\&&1\end{bmatrix}}_{\text{对角为1的上三角}}$

(2) LDU分解就是LU分解的一个变型.

设 $A=\begin{bmatrix}l_1&&\\&l_2&\\ *&\ddots&l_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1&&*\\&u_2&\\&\ddots&u_n\end{bmatrix}$ 是一个LU分解. 目标是变成

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix}1&&\\&\ddots&\\ *&&1\end{bmatrix}}_{\text{对角为1的下三角}}\underbrace{\begin{bmatrix}*&&\\&\ddots&\\&&*\end{bmatrix}}_{\text{对角矩阵}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&&*\\&\ddots&\\&&1\end{bmatrix}}_{\text{对角为1的上三角}}}$$

只需考虑上下三角如何拆成对角1矩阵和单位阵相乘.

我们以三阶矩阵为例. 设 $A=\begin{bmatrix}l_1&&\\a_{21}&l_2&\\a_{31}&a_{32}&l_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1&a_{12}&a_{13}\\&h_2&a_{23}\\&&h_3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}l_1&&\\a_{21}&l_2&\\a_{31}&a_{32}&l_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\a_{21}/l_1&1&\\a_{31}/l_1&a_{32}/l_2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}l_1&&\\&l_2&\\&&l_3\end{bmatrix}$$

(验算 $[A_1/l_1\ \ A_2/l_2\ \ A_3/l_3]\begin{bmatrix}l_1&&\\&l_2&\\&&l_3\end{bmatrix}=[A_1\ \ A_2\ \ A_3]$. 最好学会这种简单的验算方法☺)

$$\begin{bmatrix}l_1&a_{12}&a_{13}\\&l_2&a_{23}\\&&l_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_1&&\\&h_2&\\&&h_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a_{12}/h_1&a_{13}/h_1\\&1&a_{23}/h_2\\&&1\end{bmatrix}$$

(验算 $\begin{bmatrix}h_1&&\\&h_2&\\&&h_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1/h_1\\A_2/h_2\\A_3/h_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}$)

口号: 行变换对应左乘, 列变换对应右乘

$$A=\begin{bmatrix} l_1 & & \\ a_{21} & l_2 & \\ a_{31} & a_{32} & l_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ & h_2 & a_{23} \\ & & h_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ a_{21}/l_1 & 1 & \\ a_{31}/l_1 & a_{32}/l_2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} l_1 & & \\ & l_2 & \\ & & l_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & & \\ & h_2 & \\ & & h_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/h_1 & a_{13}/h_1 \\ & 1 & a_{23}/h_2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ a_{21}/l_1 & 1 & \\ a_{31}/l_1 & a_{32}/l_2 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} l_1h_1 & & \\ & l_2h_2 & \\ & & l_3h_3 \end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/h_1 & a_{13}/h_1 \\ & 1 & a_{23}/h_2 \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

Rmk：当A是对称矩阵 $\begin{cases} A=LDU \\ A^T=(LDU)^T=U^TD^TL^T \\ A=A^T \end{cases} \Rightarrow U^T=L$.

故 $A=LDL^T$.

• "结构"

结构并不是一个严格的数学概念，粗略地说，结构是装备在集合上的一些东西.

类似于一个$\underset{\text{集合}}{\text{人}}$可以穿不同的$\underset{\text{结构}}{\text{衣服}}$.

例：① 集合 $\mathbb{R}$ 装备加法运算　（$\mathbb{R}$上可以有乘法运算，但我们只考虑加法）

$(\mathbb{R},+)$ $\begin{cases} \text{单位元}0 \\ \text{每个元素有逆 } a\mapsto -a \end{cases}$

② 集合 $\mathbb{R}^*$ 装备乘法运算

$(\mathbb{R}^*,\times)$ $\begin{cases} \text{单位元 } 1 \\ \text{每个元素有逆 } a\mapsto \frac{1}{a} \end{cases}$

] 集合上一种运算构成群结构.

③ 集合 $\mathbb{R}$ 装备加法与乘法 $(\mathbb{R},+,\times)$

④ 所有$\mathbb{R}$系数多项式考虑加法与乘法 $(\mathbb{R}[x],+,\times)$

] 集合上两种运算构成环结构.

⑤ 集合装备$\mathbb{R}$数乘与加法 ———— 构成$\mathbb{R}$-线性空间

⑥ 线性空间装备乘法 ———— 构成代数

* $\mathbb{R}$-线性空间，又称 $\mathbb{R}$上的线性空间，或 linear space over $\mathbb{R}$.
同理有$\mathbb{C}$-线性空间.

• $\mathbb{R}$-线性空间的定义（8大条性质；若题目请证明××是线性空间，要逐条验证

集合
- $\mathbb{R}$ 数乘
  - "结合律" $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$
  - 单位元 $1\in\mathbb{R}$ 是数乘单位元
- 加法
  - 结合律 $(x+y)+z = x+(y+z)$
  - 单位元 $\exists 0\in V$, s.t. $x+0=x$ for $\forall x\in V$
  - 有逆 $\forall x, \exists y$ s.t. $x+y=0$ ← 加法单位元0，不是实数0.
  - 交换律 $x+y=y+x$
- $\mathbb{R}$ 数乘与加法相容 compatible（先做数乘再做加法和先做加法再做数乘相同） $c(x+y)=cx+cy$, $(c_1+c_2)x = c_1x+c_2x$

例子：$\mathbb{R}^n$ 是线性空间
- 集合(underlying set): $\mathbb{R}^n$
- 数乘: $a\in\mathbb{R}$, $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $a\cdot(x_1,\cdots,x_n) := (ax_1,\cdots,ax_n)$
- 加法: $(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n) = (x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$

（验证八大条）

☆重要性质

Theorem

If V is a vector space and x, y, and z are elements of V, then

1. $0x = 0$.
2. $(-1)x = -x$.
3. If $x+y = x+z$, then $y = z$.
4. $\beta 0 = 0$ for each scalar β.
5. If $\alpha x = 0$, then either $\alpha = 0$ or $x = 0$.

1. $0x=0$

$0\cdot x \overset{0=0+0}{=} (0+0)\cdot x \overset{\text{分配律}}{=} 0\cdot x + 0\cdot x$ ， 即 $0\cdot x = 0\cdot x + 0\cdot x$. (*)

$0\cdot x\in V$，由线性空间定义，必存在唯一逆元 y 使得 $0\cdot x + y = 0$.

(*)两边同时加 y，得 $0\cdot x + y = (0\cdot x + 0\cdot x)+y$. R.H.S. 因加法结合律，R.H.S. $= 0\cdot x + (0\cdot x + y)$

$= 0\cdot x + 0 \overset{0\text{是加法单位元.}}{=} 0\cdot x$. L.H.S. $=0$. 故 $0\cdot x = 0$.

2. $(-1)x = -x$

$x + (-1)x \overset{\text{分配律}}{=} (1+(-1))\cdot x = 0\cdot x \overset{\text{(1)的结论 } 0\cdot x=0}{=} 0$

3. If $x+y = x+z$, then $y=z$.

等式两边同时加上 $-x$，得 $-x+x+y = -x+x+z$ ，即 $y=z$.
（具有结合律的运算可以不写小括号）

4. $\beta 0=0$ (这里0是V中加法单位元，是零向量不是数)

$$\beta 0=\beta(0+0)=\beta 0+\beta 0 \xrightarrow{\text{第3点中的消去律}} 0=\beta 0$$

5. 令 $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in V$ 满足 $\alpha x=0$ 则 $\alpha=0\in\mathbb{R}$ 或 $x=0\in V$.

$\alpha=0$ 满足条件.

若 $\alpha\neq 0$, 则两边同乘 $\frac{1}{\alpha}$, L.H.S. $\frac{1}{\alpha}\cdot(\alpha x)=(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha)x=1\cdot x=x$, R.H.S. $=\frac{1}{\alpha}\cdot 0=0$

故 $x=0$.

• 子空间定义

$\mathbb{R}$-线性空间是集合装备 $\mathbb{R}$ 数乘与加法. 因此子线性空间是子集合继承原线性空间的数乘与加法并要求封闭.

* 重要性质：子空间必须包含线性空间中的加法单位元.

* 重要子空间例子：

1. 平凡子空间：令V是一个线性空间. 0是一个子空间. $V\subseteq V$ 也是一个子空间.

2. $\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ 的所有子空间 $\begin{cases}\mathbb{R}^1\text{子空间: } 0,\ \mathbb{R}^1\\ \mathbb{R}^2\text{子空间: 所有过原点直线}\\ \mathbb{R}^3\text{子空间: 所有过原点平面}\end{cases}$ (数乘与加法都显然.)

3. $\mathbb{R}^n$ 的维数 $\dim\mathbb{R}^n=n$.

• 张成 (span)

定义：设V是一个线性空间，$v_1,v_2,\cdots,v_n\in V$. 则

$$\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n \mid \alpha_i\in\mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n\}=: \mathrm{Span}(v_1,\cdots,v_n)$$

是线性空间V的子空间，称为由 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 张成的空间.

* Roughly speaking, $\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_n)$ = $\boxed{\{\text{所有由 } v_1,\cdots,v_n \text{ 线性组合得到的向量}\}\ \text{装备数乘与加法}}$

• 由A的所有列向量张成的空间称作列空间，由A所有行向量构成的空间称作行空间.

行空间维数 = 行秩 = 秩 = 列秩 = 列空间维数

行操作是否会改变矩阵的 $\begin{cases}\text{解空间?}\\ \text{行空间?}\\ \text{列空间?}\end{cases}$

① 行变换不改变解 (回忆高斯消元法解方程就是在用行变换求解)，因此解空间不变

③行变换不改变行空间

i) $\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_n)=\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots,v_n)$

ii) $\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_n)=\mathrm{span}(v_1,\cdots,\lambda v_i,\cdots,v_n)$

iii) $\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_n)=\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_i+\lambda v_j,\cdots,v_j,\cdots,v_n)$

$\Bigg\}$ Quiz

② 矩阵的秩 = 行秩 = 列秩. 行变换不改变矩阵的秩,因此不改变列空间的维数.

[Fact] 相同维数的线性空间同构

因此<u>同构意义下</u>,行变换不改变列空间.

但如果问题是列空间是否严格相等,答案是不一定.

<u>Exp 1.</u> 列空间严格相等的例子

$$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},\ \text{column space}=\mathbb{R}^3$$

$$\Big\downarrow R_1\leftrightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{bmatrix}\ \text{column space}=\mathbb{R}^3$$

Exp2. 列空间不严格相等的例子

$$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\quad \text{column space}=\text{由}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\text{张成的空间}$$

是 x-y 平面.

$$\Big\downarrow R_1\leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix}&&0\\&1&\\1&&\end{bmatrix}\quad \text{column space}=\text{由}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\text{张成的空间},$$

是 y-z 平面.

<u>x-y 平面</u>与<u>y-z 平面</u>不是同一个线性空间,

但维数相同都是 2.

• [Thm] $Ax=b$ 可解 $\Leftrightarrow$ b可由A的列向量线性表出 $\underset{\text{obvious}}{\Leftrightarrow}$ b在A的列空间中

$\Rightarrow$ Assume $Ax=b$ is solvable. Then there exists $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ s.t. $A\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$ $(*)$.
Let $A=[A_1 \cdots A_n]$ where A_i is the i-th column of A. By $(*)$, we have $A_1x_1+\cdots+A_nx_n=b$. Hence, b is a linear combination of the column of A.

$\Leftarrow$ Assume $b=A_1x_1+\cdots+A_nx_n$ is a linear combination of the columns of A.
Then $A\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=b$, and thus $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ is a solution to $Ax=b$.

• $AB=0 \not\Rightarrow A=0$ or $B=0$. 两个非零矩阵相乘可以为零.

如 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0$

•

3. 若矩阵 A 由初等列变换化为矩阵 B, 则下列说法是否正确？请说明理由。

(1) 存在矩阵 P, 使得 $PA=B$. ✗
(2) 存在矩阵 P, 使得 $BP=A$. ✓
(3) 存在矩阵 P, 使得 $PB=A$. ✗
(4) 方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解. ✗

(口号: 行变换对应左乘, 列变换对应右乘)

(1) A由初等列变换化为B, 则存在 P_c 使得 $AP_c=B$

找(1)的反例的思路:

若存在P使得 $PA=B$, 则 $PA=AP_c$. 假如A可逆, 则这样的P一定存在,
因此反例一定在不可逆矩阵中找. 简单起见在2阶矩阵中找.

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=B$. 设 $P=[x\ y]$ s.t. $PA=B$. 则 $[x\ y]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=[x\ 0]=B$

无解.
因为B的第2列是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 不是 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(2) 口号

(3) 类似于(1)

(4) $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 不同解.

设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是A的解. 设 $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 不是B的解.

Rmk: (补充, 不考)

二者解空间不相同, 但是同构. 设A的零空间为 N_A, B的零空间为 N_B.

令 $f: N_B \longrightarrow N_A$
$\quad x \longmapsto P_c x$

- 此映射良定. $Bx=0 \Rightarrow (AP_c)x=0 \Rightarrow A(P_c x)=0$. 因此 $P_c x\in N_A$.
- 此映射是单射. 设 $P_c x=P_c y$. 由 P_c 可逆可得 $x=y$.
- 此映射是满射. $\forall y\in N_A$, $y=P_c(P_c^{-1}y)$, 其中 $P_c^{-1}y\in N_B$.

$\Rightarrow$ 因此f是同构.

- A是可逆上三角，则A^{-1}也是上三角.

Pf: A是可逆上三角，因此A可通过左乘初等行变换矩阵 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 化为I，即 $E_kE_{k-1}\cdots E_1A=I$. 由于A是上三角，E_i是上三角. 上三角矩阵相乘仍是上三角，故 $A^{-1}=E_kE_{k-1}\cdots E_1$ 是上三角

- $I+AB$可逆则 $I+BA$可逆.

Pf: 设 $I+AB$ 的逆为C，即 $(I+AB)C=I$.

$(I+AB)C=I \Rightarrow C+ABC=I \Longrightarrow BC+\underset{\sim}{BA}BC=B$. 出现BA啦.

(思路：硬凑$I+BA$) 凑BA：两边左乘B

凑I：加BC减BC $\quad BC+(I+BA)BC-BC=B$

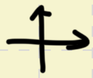
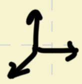
$\Longrightarrow (I+BA)BC=B.$

$\Downarrow$ 右乘A加I

$I+(I+BA)BCA=I+BA \xrightarrow{\text{移项}} I=(I+BA)(I-BCA)$ 故$I+BA$的逆是$I-BCA$.

Quiz:

① $\mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}$-线性空间，它的underlying set, $\mathbb{R}$数乘，加法是什么？

② 描述$\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$的所有子空间是什么？ $\mathbb{R}^1 \longrightarrow$ $\quad\mathbb{R}^2$  $\quad\mathbb{R}^3$ 

③ $\mathbb{C}$看作$\mathbb{C}$-线性空间，它的underlying set, $\mathbb{C}$数乘，加法是什么？

$\mathbb{C}$看作$\mathbb{R}$-线性空间，它的underlying set, $\mathbb{R}$数乘，加法是什么？

④ 行变换不改变行空间

i) $\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_n)=\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots,v_n)$

ii) $\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_n)=\mathrm{span}(v_1,\cdots,\lambda v_i,\cdots,v_n)$

iii) $\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots,v_n)=\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_i+v_j,\cdots,v_j,\cdots,v_n)$