Week 3 讲稿

• 转置 transpose

(a) $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

(b) $(A^T)^T = A$ （验证两个矩阵C,D相等只需证 $C_{ij}=D_{ij}$. 由于 $((A^T)^T)_{ij} = A^T_{ji} = A_{ij}$，有 $(A^T)^T=A$.）

(c) $(A+B)^T = A^T+B^T$ （$(A+B)^T_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji}+B_{ji}$）

(d) $(AB)^T = B^TA^T$ $\Rightarrow$ 推论：$\forall \alpha\in\mathbb{R}$ 有 $(\alpha A)^T = \alpha A^T$. pf：$\alpha$ 是1×1矩阵，故 $\alpha^T=\alpha$

于是 $(\alpha A)^T = A^T\alpha^T = A^T\cdot\alpha = \alpha\cdot A^T$

数字可以在式子中任意移动

pf: $(AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k A_{jk}B_{ki}$

$= \sum_k A^T_{kj} B^T_{ik} = \sum B^T_{ik}A^T_{kj} = B^TA^T$

(e) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

pf: $(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$.

• 对称矩阵

[Def] 若 $A^T=A$ 则称A是对称矩阵 symmetric matrix.

[prop] A是对称阵，则 $A_{ij}=A_{ji}$

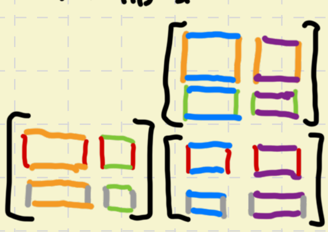
Rmk：对称阵不一定可逆；对称阵一定是方阵.

[Prop] 设R是任意方阵，则 R^TR 是对称矩阵.

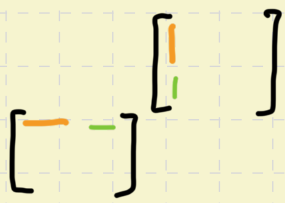
• 分块矩阵 $M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$，A, B, C, D都是矩阵，称为子矩阵 submatrix.

(1) 分块矩阵需要size合适才可相乘，

观察



切割时只要保证第一个矩阵列分割与第二个矩阵行分割一致



(这和矩阵乘法是一样的)

(2) 若可相乘的分块矩阵只需用矩阵乘法的规则做即可.

$$\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}E&F\\G&H\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}AE+BG & AF+BH\\ CE+DG & CF+DH\end{bmatrix}$$

但要注意，由于矩阵乘法非交换，不能随意改变顺序

$$\neq \begin{bmatrix}EA+GB & FA+HB\\EC+GD & FC+HD\end{bmatrix}$$

(3) 分块矩阵的转置包含子矩阵的转置 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$

(4) 矩阵线性无关行的个数 = 线性无关列的个数 = 有效方程数 = 用高斯消元法得到的非0行数 = 秩

矩阵A的秩记为 $rk(A)$ 或 $rank(A)$.

形如 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{bmatrix}$ 的分块矩阵称为分块对角矩阵.

[Fact]: 对于分块对角矩阵 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{bmatrix}$, 有 $rk(A)=rk(A_{11})+rk(A_{22})$

[Prop]: 设A是n×n矩阵组 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{bmatrix}$, 其中 A_{11}, A_{22} 分别是 $k\times k$, $(n-k)\times(n-k)$ 方阵.

则 A 是nonsingular当且仅当 A_{11} 或 A_{22} nonsingular.

Pf: A nonsingular $\Leftrightarrow rk(A)<n \xLeftrightarrow{rk(A)=rk(A_{11})+rk(A_{22})} rk(A_{11})<n$ 或 $rk(A_{22})<n$

$\Leftrightarrow A_{11}$ nonsingular 或 A_{22} nonsingular

Rmk: 非方阵一定nonsingular. 所以我们讨论是否nonsingular时都考虑方阵.

Rmk: 任何普通矩阵可以看成每个子矩阵是1×1矩阵的分块矩阵.

Rmk: 分块矩阵若出现非对角元, 说明有耦合. 解常微分方程时所说的解耦就和把非对角块消成零矩阵有关.

Rmk: 矩阵能代表一个线性变换. $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 表示的线性变换能反映被作用的空间可以分出一个不变子空间.

• 内积 x^Ty ⇝ 得到数字　　外积 y^Tx ⇝ 得到矩阵

* 学线性代数很重要的一点是想清楚一个符号到底代表什么, 是一个数? 函数? 映射? 矩阵? 线性变换? 线性映射? 向量? …

例: $(xy^T)^n=?$ 注意到 xy^T 是矩阵, 矩阵的幂次不好求. 但数字的幂次是容易的.

则 $(xy^T)^n = x(y^Tx)^{n-1}y^T = \underbrace{(y^Tx)^{n-1}}_{\text{数}} \underbrace{xy^T}_{\text{矩阵}}$

• A_L是A的左逆 $\Leftrightarrow$ $A_L\cdot A=I$; A_R是A的右逆 $\Leftrightarrow$ $A\cdot A_R=I$

一个矩阵A有逆 $\Leftrightarrow$ A有左逆 A_L 和右逆 A_R 且左逆等于右逆 $A_L=A_R$.

☆ 一个 $m\times n$ 矩阵M 可能有左逆或右逆.

$\underset{m\times n}{M}\cdot M_R=I_m$ 必须是$n\times m$　　　　$M_L\cdot \underset{m\times n}{M}=I_n$ 必须是$n\times m$

若$m\neq n$ 即M不是方阵，则 $\underset{m\times n}{M_L}\neq \underset{n\times m}{M_R}$，因为它们size不同. 因此，一个普通的 $m\times n$矩阵 $(m\neq n)$ 没有逆.

*只有方阵可能有逆. 所以提到求矩阵的逆时，这个矩阵一定是方阵.（但普通方阵是~~可能~~不一定有左逆或右逆的）.

• 一些性质

[prop] 若A的逆存在则唯一.

pf: 设 A_1, A_2 是A的两个逆，即 $A_1A=AA_1=I$, $A_2A=AA_2=I$.

$$A_1=A_1\cdot I=A_1(A\cdot A_2)=(A_1\cdot A)\cdot A_2=I\cdot A_2=A_2. \qquad \square$$

[prop] 设A是$n\times n$方阵. 若A的左逆存在则A的右逆存在且等于左逆.（方阵的左逆若存在必是逆）

pf: Fact:
1. 设 C,D是两个矩阵, $\det(C\cdot D)=\det(C)\cdot\det(D)$.
2. $\det(C)\neq 0 \Leftrightarrow$ C可逆.
3. $\det(I_n)=1$

$A_L\cdot A=I \xrightarrow{\text{两边作用}\det} \det(A_L\cdot A)=\det I$. L.H.S. $=\det(A_L)\det(A)=\det(I)=1\neq 0$

故$\det(A_L)\neq 0$, $\det(A)\neq 0$, 即 A_L与A都可逆.

$$A_L=A_L\cdot I=A_L\cdot(A\cdot A^{-1})=(A_L\cdot A)\cdot A^{-1}=I\cdot A^{-1}=A^{-1}. \qquad \square$$

*以上对右逆也成立. 这个prop可以简化证明.

老办法		新办法
1.找左逆 A_L 使得 $A_L\cdot A=I$ 2.找右逆 A_R 使得 $A\cdot A_R=I$ 3.证明$A_L=A_R$ $\Rightarrow$得到 A的逆是$A_L=A_R$	$\Longrightarrow$	☆ 找左逆 A_L 使得 $A_L\cdot A=I$(即证左逆存在) $\Rightarrow$得到 A的逆是A_L 或找右逆 A_R 使得$A\cdot A_R=I$，则A的逆是A_R.

[prop] 设 A,B 是可逆矩阵．则 $A\cdot B$ 可逆且其逆为 $B^{-1}A^{-1}$.（即 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

pf: $(AB)\cdot B^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$ □

* 类似地，有 $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}=A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$ （严格证明用数学归纳法）

Tips: $(A_1\cdots A_n)^{-1}=(A_1(A_2\cdots A_n))^{-1}=(A_2\cdots A_n)^{-1}A_1^{-1}=(A_n^{-1}\cdots A_2^{-1})A_1^{-1}$.

[prop] $Ax=0$ 只有1个解（即 $x=0$ 这一个解）当且仅当 A 可逆.

pf: （$Ax=0$ nonsingular $\Leftrightarrow$ A 可逆）

$\Leftarrow$ 设 A 可逆．则由 $Ax=0$ 得 $A^{-1}Ax=0$ 可 $x=0$ 只有一个解.

$\Rightarrow$ 设 $Ax=0$ 只有一个解．则由高斯消元法的步骤知 $E_{i_nj_n}\cdots E_{i_1j_1}A=I$.
初等行变换 E_{ij} 都可逆，故它们的乘积也可逆．于是我们构造了 A 的逆阵是 $E_{i_nj_n}\cdots E_{i_1j_1}$. □

[prop] 对角阵 $A=\begin{bmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{bmatrix}$．则 $A^{-1}=\begin{bmatrix}a_1^{-1}&&\\&\ddots&\\&&a_n^{-1}\end{bmatrix}$.

pf:
$$\begin{bmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1^{-1}&&\\&\ddots&\\&&a_n^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{bmatrix}$$ □

Rmk: 上面这个 [prop] 有深刻的几何含义．严格理解需要线性映射，这里提供粗略的理解．为了方便想象，考虑 2x2矩阵．它可以推广到 n 维.

$\begin{bmatrix}a_1&\\&a_2\end{bmatrix}$ 表示把 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 向量拉伸 a_1 倍，把 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 向量拉伸 a_2 倍.
这个过程的逆是把 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 向量拉伸 a_1^{-1} 倍，把 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 向量拉伸 a_1^{-1} 倍.

[prop] 设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$.

pf: exercise! 矩阵乘法验算即可.

* $ad-bc=:\det A$．这个prop是 $A^{-1}=\frac{A^*}{\det A}$ 的推广.

[prop] $(A^{-1})^{-1}=A$

- $[A \vdots I]$ 怎么用？（其中 I 是单位阵）

$[A \vdots I]$ 可以同时左乘相同矩阵，这样右边就可以记录所有左乘矩阵的乘积.
（只是一种技巧）

如 $[A \vdots I] \longrightarrow [B\cdot A \vdots B] \longrightarrow [C\cdot BA \vdots CB] \longrightarrow \cdots [\ \vdots X]$

读右边，说明已经对A乘了B矩阵

读右边，说明已经对A乘了矩阵CB

左边被小明弄脏了

读右边，说明小明已对A乘了X.

• 高斯约旦方法.

Idea: $[A \vdots I] \xrightarrow{\text{如果找到}A^{-1}} [A^{-1}A \vdots A^{-1}\cdot I] = [I \vdots A^{-1}]$. 我们不是一步找到 A^{-1}，而是找到一系列矩阵，乘积是 A^{-1}.

$[A \vdots I] \to [A_1A \vdots A_1] \longrightarrow [A_2A_1A \vdots A_2A_1] = [I \vdots A_2A_1]$

从 $A_2A_1A = I$ 可知 $A_2A_1 = A^{-1}$.

Details:

△初等行变换等价于左乘某个矩阵

例子: $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$

① 交换第一行和第三行等价于左乘 $\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ （验算 $\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_3 \\ A_2 \\ A_1 \end{bmatrix}$）

② 第二行乘上λ等价于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ （验算 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \lambda A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$）

③ 第二行λ倍加到第三行等价于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \lambda & 1 \end{bmatrix}$ （验算 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \lambda & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \lambda A_2 + A_3 \end{bmatrix}$）

④ 第三行λ倍加到第二行等价于左乘 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \lambda \\ & & 1 \end{bmatrix}$ （验算 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \lambda \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \lambda A_3 + A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$

☆观察: (1) 如果是用**上**面的行消**下**面的行，所使用的初等行变换是**下**三角.

例如 $R_2 \to R_2 + \lambda R_1$，对应初等行变换矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ \lambda & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$，是**下三角**

(2) 同理，如果是用**下**面的行消**上**面的行，所使用的初等行变换是**上三角**.

(3) 发生行交换则既**非**上三角，又**非**下三角.

△ 高斯-约旦方法求逆 和LU分解

以下使用 L_i 表示某个下三角的初等行变换，U_i 表示某个上三角的初等行变换.

Step I: $\underbrace{[A \vdots I] \xrightarrow{\text{上行消下行}} [L_1A \vdots L_1] \longrightarrow [L_2L_1A \vdots L_2L_1] \longrightarrow \cdots \longrightarrow}_{\text{一直用上行消下行最后使得左边变成上三角，记作}U} [U \vdots L_nL_{n-1}\cdots L_1]$

$\| $ 下三角乘积是下三角

$[U \vdots L]$

（作为求逆的办法可以使用行交换，若要用此办法得到LU分解则不可使用行交换）（Step II 同理）

*若 U^{-1} 存在 则 $[U \vdots L] \to [U^{-1}U \vdots U^{-1}L] = [I \vdots U^{-1}L]$ 当左边变成I，右边是 A^{-1}.

$A^{-1} = U^{-1}L$ 即 $A = (U^{-1}L)^{-1} = L^{-1}U$ 这就是LU分解，分解成一个下三角乘上三角.

Step II: $[U \vdots L] \xrightarrow{\text{用下行消上行}} [U_1U \vdots U_1L] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [I \vdots U_mU_{m-1}\cdots U_1L] = [I \vdots U^{-1}L]$

故 $A^{-1}=U^{-1}L$，即 $A=L^{-1}U$ 是LU分解.

总结：

①高斯约旦法求逆：$[A\,\vdots\,I] \xrightarrow[\text{(可换行)}]{\text{初等行变换}} \left[\begin{matrix} * & * \\ & * \end{matrix}\,\vdots\,B\right] \xrightarrow[\text{(可换行)}]{\text{初等行变换}} \left[\begin{matrix} 1 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{matrix}\,\vdots\,C\right]$. 则 $A^{-1}=C$

②LU分解：**不是**所有矩阵可以做LU分解，若用高斯约旦法求逆过程中没有使用行交换则有LU分解. 如果未卜先知地做换行操作得到PA则可保证高斯约旦法不使用行交换，则PA有LU分解.

例子：

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & & \\ 2 & 1 & 0 & & 1 & \\ & 1 & 1 & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to 3R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to \frac{1}{3}R_3]{R_2\to -\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1\to -2R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 1 \end{array}\right]$$

U　　L

故 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$

- LDU分解.

(1) LDU分解的形式是 $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{对角为1的下三角}} \underbrace{\begin{bmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{bmatrix}}_{\text{对角矩阵}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{对角为1的上三角}}$

(2) LDU分解就是LU分解的一个变型.

设 $A=\begin{bmatrix} l_1 & & \\ & l_2 & \\ * & \ddots & l_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & & * \\ & u_2 & \\ & \ddots & u_n \end{bmatrix}$ 是一个LU分解. 目标是变成

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{对角为1的下三角}} \underbrace{\begin{bmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{bmatrix}}_{\text{对角矩阵}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{\text{对角为1的上三角}}}$$

只需考虑上下三角如何拆成对角矩阵和单位阵相乘.

我们以三阶矩阵为例. 设 $A=\begin{bmatrix} l_1 & & \\ a_{21} & l_2 & \\ a_{31} & a_{32} & l_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ & h_2 & a_{23} \\ & & h_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} l_1 & & \\ a_{21} & l_2 & \\ a_{31} & a_{32} & l_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ a_{21}/l_1 & 1 & \\ a_{31}/l_1 & a_{32}/l_2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} l_1 & & \\ & l_2 & \\ & & l_3 \end{bmatrix}$$

(验算 $[A_1/l_1 \quad A_2/l_2 \quad A_3/l_3]\begin{bmatrix} l_1 & & \\ & l_2 & \\ & & l_3 \end{bmatrix}=[A_1 \quad A_2 \quad A_3]$.最好学会这种简单的验算方法☺)

$$\begin{bmatrix} l_1 & a_{12} & a_{13} \\ & l_2 & a_{23} \\ & & l_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_1 & & \\ & h_2 & \\ & & h_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/h_1 & a_{13}/h_1 \\ & 1 & a_{23}/h_2 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

(验算 $\begin{bmatrix} h_1 & & \\ & h_2 & \\ & & h_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1/h_1 \\ A_2/h_2 \\ A_3/h_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$)

口号: 行变换对应左乘, 列变换对应右乘.(上课会细说, 先留个印象)

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & & \\ a_{21} & l_2 & \\ a_{31} & a_{32} & l_3 \end{bmatrix}}\underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ & h_2 & a_{23} \\ & & h_3 \end{bmatrix}}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ a_{21}/l_1 & 1 & \\ a_{31}/l_1 & a_{32}/l_2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} l_1 & & \\ & l_2 & \\ & & l_3 \end{bmatrix}}\underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & & \\ & h_2 & \\ & & h_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/h_1 & a_{13}/h_1 \\ & 1 & a_{23}/h_2 \\ & & 1 \end{bmatrix}}$$

$$=\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ a_{21}/l_1 & 1 & \\ a_{31}/l_1 & a_{32}/l_2 & 1 \end{bmatrix}}\underset{D}{\begin{bmatrix} l_1h_1 & & \\ & l_2h_2 & \\ & & l_3h_3 \end{bmatrix}}\underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/h_1 & a_{13}/h_1 \\ & 1 & a_{23}/h_2 \\ & & 1 \end{bmatrix}}$$

Rmk: 当A是对称矩阵 $\begin{cases} A=LDU \\ A^T=(LDU)^T=U^TD^TL^T \\ A=A^T \end{cases} \Rightarrow U^T=L$.

故 $A=LDL^T$.

作业.

1.6 T2 (2) P^{-1}为什么等于P^T？

简单但有点绕的证明：

$$(PP^T)_{ij}=\sum_k P_{ik}P^T_{kj}=\sum_k P_{ik}P_{jk}.$$

若 $i=j$ 则 $(PP^T)_{ii}=\sum_k P_{ik}^2=1$，因为 P的任何一行有且仅有一个 1.

若 $i\neq j$ 则 $(PP^T)_{ij}=\sum_k P_{ik}P_{jk}=0$，因为P的第k列有且仅有一个1，因此 P_{ik}, P_{jk}中必有一个是0.

抽象但简洁的证明(可以不用明白) (σ在学行列式时会出现)

任意置换矩阵P，存在$\sigma\in S_n$，使得$P_{ij}=\delta_{j\sigma(i)}$

这是因为所有置换矩阵是S_n的一个表示 ⌣

则 $(P\cdot P^T)_{ij}=\sum_k P_{ik}P^T_{kj}=\sum_k P_{ik}P_{jk}=\sum_k \delta_{k\sigma(i)}\delta_{k\sigma(j)}=\delta_{\sigma(i)\sigma(j)}=\delta_{ij}$

12. If A is invertible, which properties of A remain true for A^{-1}?
(a) A is triangular. (b) A is symmetric. (c) A is tridiagonal. (d) All entries are whole numbers. (e) All entries are fractions (including numbers like $\frac{3}{1}$).

结论很重要，必须记住.

*tridiagonal 三对角 $\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \\ & b_2 & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$ (example $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 是三对角)

(a) (b) (e)

1.6 T17 证明若A可逆则A的LDU分解唯一.

Pf: 设 $A=L_1D_1U_1=L_2D_2U_2$ 是两种LDU分解.

则对 $L_1D_1U_1=L_2D_2U_2$ 两边同时左乘 L_1^{-1} 和右乘 U_2^{-1} 得 $D_1U_1U_2^{-1}=L_1^{-1}L_2D_2$ (*)

U_2 是上三角, 由1.6 T(12)(c)知 U_2^{-1} 也是上三角. D_1, U_1, U_2^{-1} 是上三角, 则它们的乘积 $D_1U_1U_2^{-1}$ 也是上三角(注意对角阵是特殊的上三角; 上三角的乘积是上三角是上周的作业) 同理, $L_1^{-1}L_2D_2$ 是下三角.

Claim: 若矩阵M既是上三角, 又是下三角则M是对角矩阵.

pf for the claim: $\left.\begin{array}{l} M\text{是上三角, 则对任意 } i>j \text{ 有 } M_{ij}=0 \\ M\text{是下三角, 则对任意 } i<j \text{ 有 } M_{ij}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow M$是对角阵

$$\left(\begin{array}{l} \text{证上三角} \Leftrightarrow \text{证 } i>j \ M_{ij}=0 \\ \text{证下三角} \Leftrightarrow \text{证 } i<j \ M_{ij}=0 \\ \text{证对角阵} \Leftrightarrow \text{证 } i\neq j \ M_{ij}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} i>j & M_{ij}=0 \\ i<j & M_{ij}=0 \end{cases} \end{array}\right)$$

记 $D_1U_1U_2^{-1}=L_1^{-1}L_2D_2=\Lambda$. 由claim, Λ 是对角矩阵.

由 $D_1U_1U_2^{-1}=\Lambda$ 得 $U_1U_2^{-1}=D_1^{-1}\Lambda$ 是两个对角阵相乘, 故 $U_1U_2^{-1}$ 是对角阵.

$$(U_1U_2^{-1})_{ii}=\sum_j (U_1)_{ij}(U_2^{-1})_{ji} = \sum_{j<i}(U_1)_{ij}(U_2^{-1})_{ji}+\sum_{j>i}(U_1)_{ij}(U_2^{-1})_{ji}+(U_1)_{ii}(U_2^{-1})_{ii}$$

$$=\underbrace{0}_{(U_1)_{ij}=0}+\underbrace{0}_{(U_2^{-1})_{ji}=0}+\underbrace{1\cdot 1}_{\text{LDU分解中, U的对角线上全是1.}}=1$$

故 $U_1U_2^{-1}=I$, 即 $U_1=U_2$. 同理 $L_1L_2^{-1}=I$ 即 $L_1=L_2$.

补充

T1 (a) week2作业已证 $\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2)\\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$

i) $n=2$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ -\sin2\theta & \cos2\theta\end{bmatrix}$$

ii) 设 $n=k$ 时有 $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}$

则 $n=k+1$ 时

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta\\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta\end{bmatrix}$$

(b) $n\geqslant2$

$$\begin{bmatrix}\lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda\end{bmatrix}^n=\left(\begin{bmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0\end{bmatrix}\right)^n.\quad \text{Let } A=\begin{bmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

容易验算 $B^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$, $B^3=0$.（这种矩阵在学习若尔当标准型时有用）

原式 $=(A+B)^n=\sum_k\binom{n}{k}A^kB^{n-k}=\binom{n}{n}A^nB^0+\binom{n}{n-1}A^{n-1}B+\binom{n}{n-2}A^{n-2}B^2$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & & \\ & \lambda^n & \\ & & \lambda^n\end{bmatrix}+\frac{n!}{(n-1)!}\begin{bmatrix}\lambda^{n-1} & & \\ & \lambda^{n-1} & \\ & & \lambda^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0\end{bmatrix}+\frac{n!}{2!(n-2)!}\begin{bmatrix}\lambda^{n-2} & & \\ & \lambda^{n-2} & \\ & & \lambda^{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & & \\ & \lambda^n & \\ & & \lambda^n\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0&0&0\\ \lambda^{n-1}&0&0\\0&\lambda^{n-1}&0\end{bmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{bmatrix}0 & & \\ 0 & 0 & \\ \lambda^{n-2} & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^n & & \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n & \\ \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} & n\lambda^{n-1} & \lambda^n\end{bmatrix}$$

5. 证明：如果 A 和所有的 n 级矩阵都可以交换, 那么 $A=\lambda I$, 这里 λ 是一个实数, I 为 n 阶单位阵.

Pf: 设 B是任意 $n\times n$ 矩阵，则由题意得 $(AB)_{ij}=(BA)_{ij}$，即 $\sum_k A_{ik}B_{kj}=\sum_k B_{ik}A_{kj}$ (*)

对任意 $B=(B_{ij})$成立. 既然 (*)对任意 B成立，则 (*) 对特殊的$(B)_{ij}$ 成立.

取 $B_{ij}=\begin{cases}1 & i=l,\ j=m\\ 0 & i\neq l,\ j\neq m\end{cases}=\delta_{il}\delta_{jm}$，记为 B^{lm} （example, $B^{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$）

于是 L.H.S. of (*) $=\sum_k A_{ik}B^{lm}_{kj}=\sum_k A_{ik}\delta_{kl}\delta_{mj}=A_{il}\delta_{mj}$

R.H.S. of (*) $=\sum_k B^{lm}_{ik}A_{kj}=\sum_k\delta_{il}\delta_{mk}A_{kj}=A_{mj}\delta_{il}$

$\Rightarrow A_{il}\delta_{mj}=A_{mj}\delta_{il}$

(*) 取 $l=i, m=j$ 得 $A_{ii}\delta_{jj}=A_{jj}\delta_{ii}$ 即 $A_{ii}=A_{jj}$. 因此对角线是同一个元素.

(*) 对任意 $l\neq i$, 取 $m=j$ 得 $A_{il}\delta_{jj}=A_{jj}\underbrace{\delta_{il}}_{\delta_{il}=0}=0$ 故 A 的非对角元是0.