• 正定(负定矩阵)

[定义] 设A是一个n阶对称方阵. 若 $\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^n$, $x^TAx>0$ 则称A是正定矩阵.

若 $\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^n$, $x^TAx<0$ 则称A是负定矩阵.

[Rmk] 若A正定, 则$-A$是负定矩阵. ($\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^n$, $x^T(-A)x=-x^TAx<0$)

[Thm] 设A是一个n阶对称方阵, 则

A正定 $\Leftrightarrow$ A的各阶 $\det A_k>0$, 其中A_k是A的左上角k阶矩阵.

后续会用到2阶对称阵, 我们只证明以上thm 在 $n=2$的特殊情况.

[Thm] A是一个2阶对称方阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$, 则

A正定 $\Leftrightarrow$ $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0$

pf: $\Rightarrow$ Assume A正定. 由正定定义, 有

$$[x_1\ \ x_2]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}>0 \quad 对\forall 0\neq\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 成立.$$

Trick: 取特殊值

即 $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\overset{\text{Rmk1}}{=}a_{11}(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2)^2+\left(\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2>0$, $\forall 0\neq\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$

取 $x_1=1$, $x_2=0$, 得 $a_{11}>0$

取 $x_1=-\frac{a_{12}}{a_{11}}$, $x_2=1$ 得 $\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}>0$. 又由 $a_{11}>0$ 知 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$

$\Leftarrow$ Assume $a_{11}>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$.

显然 $a_{11}(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2)^2+(\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}})x_2^2\geq 0$.

等号成立当且仅当 $\begin{cases}x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2=0\\ \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$. 因此 $a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2>0$, $\forall 0\neq\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$

Rmk1: $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$

$=a(x^2+\frac{b}{a}xy)+cy^2$

$=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}xy+(\frac{b}{2a}y)^2-(\frac{b}{2a}y)^2\right)+cy^2$

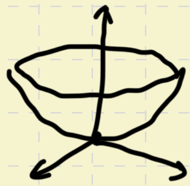
$=a(x+\frac{b}{2a}y)^2-a(\frac{b}{2a}y)^2+cy^2$

$=a(x+\frac{b}{2a}y)^2+\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)y^2$

• 判断极值点.

$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是$\mathbb{R}^2$上的函数. 例如 $F(x,y)=x^2+y^2$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto F(x,y)$



bowl

(在$z=k$截面是一个半径为$\sqrt{k}$的圆)

Δ (Taylor 展开)(条件足够好) F 在点 (x_0,y_0) 处有多项式近似

$$F(x,y)=F(x_0,y_0)+\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)^2\right)+\cdots$$

亦可写作等价形式

$$F(\vec{a}+\vec{h})=F(\vec{a})+\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\vec{a}}h_1+\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{\vec{a}}h_2+\frac{1}{2}\vec{h}^T\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{a})\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a})\end{bmatrix}}_{\text{出现了正负定判断中的“}x^TAx\text{”}}\vec{h}+\cdots$$

矩阵 $\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{a})\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a})\end{bmatrix}$ 被称作 $F(x,y)$ 的 Hesse 方阵 $HF(\vec{a})$

[Thm] (记号如上) 设 $\vec{a}\in\mathbb{R}^2$ 满足 $\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{a})=\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}(\vec{a})\\ \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{a})\end{bmatrix}=0$.

(i) 若 Hesse 方阵 $HF(\vec{a})$ 正定，则 $\vec{a}$ 是 F 的一个极小值点

(ii) 若 Hesse 方阵 $HF(\vec{a})$ 负定，则 $\vec{a}$ 是 F 的一个极大值点

(iii) 若 Hesse 方阵 $HF(\vec{a})$ 不定，则 $\vec{a}$ 不是极值点.

Test for Positive Definiteness

Here is the main theorem on positive definiteness:

Theorem

Each of the following tests is a necessary and sufficient condition for the real symmetric matrix A to be positive definite:

(I) *$x^TAx>0$ for all nonzero real vectors x.*

(II) *All the eigenvalues of A satisfy $\lambda_i>0$.*

(III) *All the* ***upper left submatrices*** *A_k (顺序主子矩阵) have positive determinants.*

(IV) *All the pivots (without row exchanges) satisfy $d_k>0$.*

Theorem

The symmetric matrix A is positive definite if and only if (V) There is a matrix R with independent columns such that $A=R^TR$.

R可以选成

1. LDL^T 分解
$A=LDL^T=(L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^T)$
$=(L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T$

2. A的对角化 $A=Q\Lambda Q^T$
$=(Q\sqrt{\Lambda})(Q\sqrt{\Lambda})^T$

Semidefinite Matrices

The tests for semidefiniteness will relax $x^T Ax > 0, \lambda > 0, d > 0$, and $\det > 0$, to allow zeros to appear.

Theorem

Each of the following tests is a necessary and sufficient condition for the real symmetric matrix A to be positive semidefinite:

- (I') $x^T Ax \geq 0$ *for all nonzero real vectors* x *(this defines positive semidefinite).*
- (II') *All the eigenvalues of* A *satisfy* $\lambda_i \geq 0$.
- (III') *No* ***principal submatrices*** *(主子矩阵) have negative determinants.*
- (IV') *No pivots are negative.*
- (V') *There is a matrix* R*, possibly with dependent columns, such that* $A = R^T R$.

• n元二次型化为标准型

①配方法.
(后续有例子)

②矩阵对角化法

任何n元实二次型 $q(x_1,\cdots,x_n)=\sum q_{ij}x_ix_j$ 可以写作 $q(x_1,\cdots,x_n)=x^TAx$，其中 $x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}$，

$A_{ij}=\frac{q_{ij}+q_{ji}}{2}$. 由构造，A是实对称矩阵则 $A=Q^T\Lambda Q$. 故

$q=x^TQ^T\Lambda Q x=(Qx)^T\Lambda(Qx) \xrightarrow{\text{令}Qx=Y} q(Y)=y^T\Lambda y=\Lambda_{11}y_1^2+\Lambda_{22}y_2^2+\cdots+\Lambda_{nn}y_n^2$.

• 复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 上任意二次型q都可经过可逆线性变换化成 $q=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2$

• (惯性定律) 实向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的任意二次型q都可经过可逆变量替换化为如下形式: $q=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2$

这里系数1的平方项个数p称为q的正惯性指数，系数-1的平方项个数称为负惯性指数，二者差 $p-s=p-(r-p)=2p-r$ 称为符号差.

[Rmk]上面两个定理属于"分类性质的定理".

[例] 将二次型 $q(x,y,z)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ 化为标准型

错误做法：做变量替换 $\begin{cases}X=x-y\\Y=y-z\\Z=z-x\end{cases}$ 则 $q=X^2+Y^2+Z^2$.

但是此时 $\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$ 不可逆. 因此这种变换不可行.

正确做法：$\begin{cases}X_1=x-y\\Y_1=y-z\\Z_1=z\end{cases}$ (1)，此时 $q=X_1^2+Y_1^2+(X_1+Y_1)^2$

$$=2X_1^2+2Y_1^2+2X_1Y_1$$
$$=2(X_1+\tfrac{1}{2}Y_1)^2+\tfrac{3}{2}Y_1^2.$$

再做变量替换 $\begin{cases}X=X_1+\frac{1}{2}Y_1\\Y=Y_1\\Z=Z_1\end{cases}$ (2) 得 $q=2X^2+\frac{3}{2}Y^2$.

由(1),(2)得我们做的线性变换是 $\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1/2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\Y_1\\Z_1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&1/2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-1/2&-1/2\\&1&-1\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

[例] 将 $q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+4xy-6xz-6yz$ 化为标准型.

$$q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+4xy-6xz-6yz$$

$$=x^2+\underbrace{(4y-6z)}_{x\text{系数}}x+\underbrace{y^2+z^2-4yz}_{x^0\text{系数}}$$

Trick：先focus在 x 上，把 y,z 全看成 x 的系数

$$=x^2+2\tfrac{4y-6z}{2}x+\left(\tfrac{4y-6z}{2}\right)^2-\left(\tfrac{4y-6z}{2}\right)^2+y^2+z^2-4yz$$
$$=(x+2y-3z)^2-(2y-3z)^2+y^2+z^2-4yz$$
$$=(x+2y-3z)^2-3y^2-8z^2+8yz$$

(Focus on y)

$$-3y^2-8z^2+8yz=-3(y^2-\tfrac{8}{3}yz)-8z^2$$
$$=-3(y^2-2\cdot y\tfrac{4}{3}z+\tfrac{16}{9}z^2-\tfrac{16}{9}z^2)-8z^2$$
$$=-3(y-\tfrac{4}{3}z)^2-\tfrac{8}{3}z^2$$

故 $q(x,y,z)=(x+2y-3z)^2-3(y-\frac{4}{3}z)^2-\frac{8}{3}z^2$

【例】$q(x,y,z)=xy+yz+xz$ 化为标准型

这里没有平方项. Trick：做变量替换变出平方项

令 $\begin{cases} X_1=\frac{x+y}{2} \\ Y_1=\frac{x-y}{2} \\ Z_1=z \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=X_1+Y_1 \\ y=X_1-Y_1 \\ z=Z_1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} q &= (X_1+Y_1)(X_1-Y_1)+(X_1+Y_1)Z_1+(X_1+Y_1)Z_1 \\ &= X_1^2-Y_1^2+2X_1Z_1 \\ &= X_1^2+2Z_1X_1-Y_1^2 \quad (\text{focus on } X_1) \\ &= (X_1^2+2Z_1X_1+Z_1^2-Z_1^2)-Y_1^2 \\ &= (X_1+Z_1)^2-Z_1^2-Y_1^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} X=X_1+Z_1 \\ Y=Y_1 \\ Z=Z_1 \end{cases} \Rightarrow q=X^2-Y^2-Z^2$

1. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_1$ 的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围是 ____.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_1 \\ &= x_1^2+(2ax_3+4x_2)x_1-x_2^2 \\ &= x_1^2+2(ax_3+2x_2)x_1+(ax_3+2x_2)^2-(ax_3+2x_2)^2-x_2^2 \\ &= (x_1+ax_3+2x_2)^2-(a^2x_3^2+4ax_3x_2+4x_2^2)-x_2^2 \\ &= (x_1+ax_3+2x_2)^2-5x_2^2-4ax_3x_2-a^2x_3^2 \\ &= (x_1+ax_3+2x_2)^2-5(x_2^2+\tfrac{4a}{5}x_3x_2)-a^2x_3^2 \\ &= (x_1+ax_3+2x_2)^2-5(x_2^2+\tfrac{4a}{5}x_3x_2+(\tfrac{2a}{5}x_3)^2-(\tfrac{2a}{5}x_3)^2)-a^2x_3^2 \\ &= (x_1+ax_3+2x_2)^2-5(x_2+\tfrac{2a}{5}x_3)^2+\underline{(\tfrac{4a^2}{5}-a^2)x_3^2} \\ &= (x_1+ax_3+2x_2)^2-5(x_2+\tfrac{2a}{5}x_3)^2-\tfrac{1}{5}a^2x_3^2 \end{aligned}$$

若 $a=0$ $(x_1+2x_2)^2-5x_2^2$ 负惯性指数是1,

若 $a\neq0$ 则 负惯性指数是 2

$\Rightarrow a=0$.

3. 设 A 是三阶实对称矩阵，E 为三阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$, 且 $|A|=4$, 则二次型 x^TAx 的规范形为 ____.

找 A 的特征值.

设 $Av=\lambda v$. $(A^2+A)v=2Iv$，即 $(\lambda^2+\lambda)v=2v$.

故 $(\lambda^2+\lambda-2)v=0$. $v\neq0$ 故 $\lambda^2+\lambda-2=0$ 即 $\lambda=-2$ 或 1

A是三阶实对称阵，故A有三个特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. 由$\begin{cases}\lambda_i \text{只能是 }-2\text{或}1\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=4\end{cases}$

得 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 只能 $-2,-2,1$.

故 x^TAx 的规范形是 $-2X^2-2Y^2+Z^2$.

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$, 其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$, 若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 ____.

$$f(y)=y^T\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}y$$
$$=(P^{-1}x)^T\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}P^{-1}x$$
$$=x^T(P^{-1})^T\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}P^{-1}x$$

$$Q=[e_1\ -e_3\ e_2]=[e_1\ e_2\ e_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$
$$=P\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}}_{\triangleq A}$$

$$(Q^{-1}x)^T\Lambda(Q^{-1}x)$$
$$=((PA)^{-1}x)^T\Lambda((PA)^{-1}x)$$
$$=(A^{-1}P^{-1}x)^T\Lambda A^{-1}P^{-1}x$$
$$=x^T(P^{-1})^T(A^{-1})^T\Lambda A^{-1}P^{-1}x$$
$$=x^T(P^{-1})^T[(A^{-1})^T\Lambda A^{-1}]P^{-1}x.$$

So $(A^{-1})^T\Lambda A^{-1}=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$

Hence $\Lambda=A^T\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}A$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$, 则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为 ____.

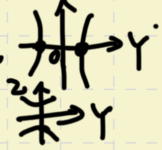
$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$$
$$=x_1^2+(4x_2+4x_3)x_1+x_2^2+x_3^2+4x_2x_3$$
$$=x_1+2(2x_2+2x_3)x_1+(2x_2+2x_3)^2-(2x_2+2x_3)^2+x_2^2+x_3^2+4x_2x_3$$
$$=(x_1+2x_2+2x_3)^2-3x_2^2-3x_3^2-4x_2x_3$$
$$=(x_1+2x_2+2x_3)^2-3(x_2^2+\tfrac{4}{3}x_2x_3+(\tfrac{2}{3}x_3)^2-(\tfrac{2}{3}x_3)^2)-3x_3^2$$
$$=(x_1+2x_2+2x_3)^2-3(x_2+\tfrac{2}{3}x_3)^2-\tfrac{5}{3}x_3^2=2$$

即 $3(x_2+\frac{2}{3}x_3)^2+\frac{5}{3}x_3^2-(x_1+2x_2+2x_3)^2-2=0$

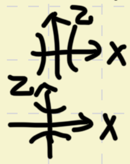
$X^2+Y^2-Z^2-d=0$ 型，是单叶双叶面

: $X^2+Y^2-Z^2-d=0$ " Trick: 不停取 $X, Y, Z=0$ 从截面看)

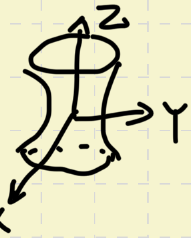
取 $X=0$ 是 $Y^2-Z^2=d$ 是双曲线 $\begin{cases} d>0 \text{则 取} Z=0 \text{得} Y \text{有解，因此} \\ d<0 \text{则 取} Z=0 \text{得} Y \text{无解，因此} \end{cases}$



取 $Y=0$ 是 $X^2-Z^2=d$ 是双曲线 $\begin{cases} d>0 \text{则 取} Z=0 \ X \text{有解} \\ d<0 \text{则 取} Z=0 \ X \text{无解} \end{cases}$

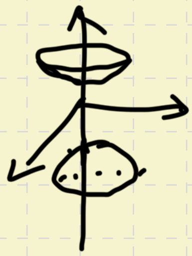


故 $d>0$



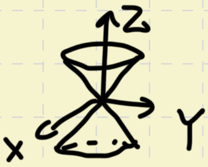
单叶双曲面

$d<0$



双叶双曲面.

$d=0$ 二次锥面
(中间形态)

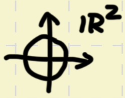


• 椭球体.

A是一给定实对称矩阵. 考虑几何体 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x^TAx=1\}$.

[Example]

$A=\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}$. $\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x^TAx=1\}=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2=1\}=$



□

设 $\begin{cases} A=Q\Lambda Q^T. \\ \Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix} \text{其中} \lambda_i \text{是A特征值} \end{cases}$ 则 $\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x^TAx=1\}=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x^TQ\Lambda Q^Tx=1\}$

$$\overset{①}{=}\{Q^Tx\in\mathbb{R}^2 \mid (Q^Tx)^T\Lambda(Q^Tx)=1\}$$

$$\overset{\text{令}y=Q^Tx}{=}\{y\in\mathbb{R}^2 \mid y^T\Lambda y=1\}$$

$$=\{y\in\mathbb{R}^2 \mid \lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=1\}$$

[Rmk①] 这是由于两个集合之间可以建立双射.

$$\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x^TQ\Lambda Q^Tx=1\}\longrightarrow\{Q^Tx\in\mathbb{R}^2 \mid (Q^Tx)^T\Lambda(Q^Tx)=1\}$$
$$x\longmapsto Q^Tx$$

这是双射因为 Q^T 是可逆矩阵. □

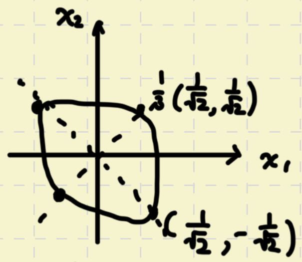
$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=1$ 是椭球体方程. 此椭球体在 y_i 轴 $(y_1=y_2=\cdots=y_{i-1}=y_{i+1}=\cdots=y_n=0)$ 上的长度是 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$，其中 λ_i 是A的第i个特征值.

[Exp] $A=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}}_{Q}\underbrace{\begin{bmatrix}1&\\&9\end{bmatrix}}_{\Lambda}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}}_{Q^T}$

$$x^TAx = (Q^Tx)^T\Lambda(Q^Tx) = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix}1 & \\ & 9\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$$

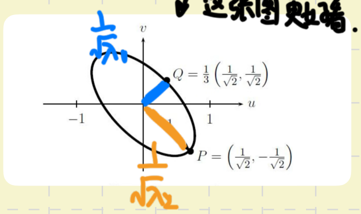
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2}x_1 - \frac{1}{\sqrt2}x_2 \\ \frac{1}{\sqrt2}x_1 + \frac{1}{\sqrt2}x_2 \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix}1 & \\ & 9\end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2}x_1 - \frac{1}{\sqrt2}x_2 \\ \frac{1}{\sqrt2}x_1 + \frac{1}{\sqrt2}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt2}x_1 - \frac{1}{\sqrt2}x_2\right)^2}_{a} + \underbrace{9\left(\frac{1}{\sqrt2}x_1 + \frac{1}{\sqrt2}x_2\right)^2}_{b} = 1$$



$\Leftarrow$ $a=0, b=1$ 与 $a=1, b=0$ 可以确定边界点

这张图更准确.



$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt2}x_1 - \frac{1}{\sqrt2}x_2 = 0 \\ \left(\frac{1}{\sqrt2}x_1 + \frac{1}{\sqrt2}x_2\right)^2 = \frac19 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{\sqrt2}{3}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt2}x_1 - \frac{1}{\sqrt2}x_2\right)^2 = 1 \\ \frac{1}{\sqrt2}x_1 + \frac{1}{\sqrt2}x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = -x_2$

$x_1 - x_2 = \sqrt2$

$x_2 = -\frac{\sqrt2}{2}$