• 酉矩阵 复线性空间中的正交矩阵.

△定义：若复方阵U满足$U^HU=I$，则U称为酉矩阵.

△ U保长度：$(Ux)^H Uy = x^H U^H U y = x^H y$.（回顾保内积就是保长度）

△ [prop] U是酉矩阵，则U的特征值模长为1.

pf: 设 $Uv=\lambda v$.

$$(Uv)^H(Uv) = v^H v \quad \text{(酉矩阵保内积)}$$

$$(Uv)^H(Uv) = (\lambda v)^H(\lambda v) = \bar{\lambda}\lambda\, v^H v.$$

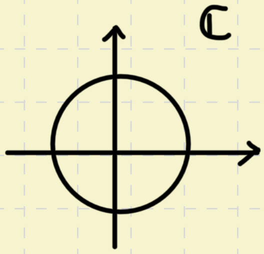
故 $|\lambda|^2 v^H v = v^H v$ 即 $(|\lambda|^2-1)v^H v=0$. $v\neq 0$ 故 $v^H v\neq 0$. 于是 $|\lambda|^2=1$ 即 $|\lambda|=1$.

Rmk：Q是正交矩阵，Q若有实特征值，则值只能为±1.（实数是特殊的复数）

这是因为Q是特殊酉矩阵，因此Q特征值模长是1，而 模1实数只有±1.

注意：Q可以有复特征值，满足模长为1即可，例如旋转矩阵$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$有特征值$\pm i$

Rmk：



Rmk：酉矩阵保长度，因此所有向量模长不改变，因此特征值为模1复数是合理的.

△ [prop] 设$\lambda_1\neq\lambda_2$是unitary matrix U的两个特征值. 则 $E(U,\lambda_1)\perp E(U,\lambda_2)$

（Rmk:作证明时经常写$Uv=\lambda v$，这种写法容易让人误解特征向量只有一个. 事实上，同一个特征值的所有特征向量$\{v\in V \mid Uv=\lambda v\}$ for fixed λ 构成线性空间.）

pf: 设$Uv_1=\lambda_1 v_1$，$Uv_2=\lambda_2 v_2$，$\lambda_1\neq\lambda_2$. w.t.s. $v_1^H v_2=0$.

U保内积，故 $v_1^H v_2 = (Uv_1)^H(Uv_2) = \bar{\lambda}_1\lambda_2 v_1^H v_2$.

若 $v_1^H v_2\neq 0$，则 $\bar{\lambda}_1\lambda_2=1$，于是有

$$\underset{\uparrow\ \bar{\lambda}_1\lambda_2-1=0}{0} = (\bar{\lambda}_1\lambda_2-1)\lambda_1 = |\lambda_1|^2\lambda_2-\lambda_1 = \lambda_2-\lambda_1\neq 0 \quad \rightarrow\leftarrow$$

故 $v_1^H v_2=0$.

• 斜厄米 Skew-Hermitian $K^H=-K$

[prop] $A^H=A \Rightarrow iA$ is skew-Hermitian

[prop] K是skew-Hermitian, 则特征值为纯虚数.

Pf: $Kv=\lambda v \Rightarrow v^H K^H = \lambda^H v^H = \bar{\lambda} v^H$

$\xrightarrow{右乘v} v^H K^H v = \bar{\lambda} v^H v$

$\Longrightarrow -v^H K v = \bar{\lambda} v^H v \Rightarrow -v^H \lambda v = \bar{\lambda} v^H v$

...

$\Rightarrow -\lambda = \bar{\lambda}$.

[prop] $K=U\Lambda U^H$ (类似实对称矩阵 $A=Q\Lambda Q^T$)

• 相似矩阵：同一个线性变换在不同基下的矩阵

△ 相似是两个矩阵之间的关系, 用 $A\sim B$ 表示 A 相似于 B. 这种关系有以下性质:

① $A\sim A$ (反身性, 自己和自己相似)

② 若 $A\sim B$ 则 $B\sim A$ (对称性)

③ 若 $A\sim B, B\sim C$ 则 $A\sim C$ (传递性)

实际上满足反身性、对称性、传递性的关系称为等价关系.

等价关系的例子(Quiz): $\mathbb{R}$ 上的等于号

△ 相似矩阵具有相同特征值

$|MAM^{-1}-\lambda I| = |M(A-\lambda I)M^{-1}| = |M|\,|A-\lambda I|\,|M^{-1}| = |A-\lambda I|$

故 $|MAM^{-1}-\lambda I|=0$ 的解等于 $|A-\lambda I|=0$ 的解. 故 MAM^{-1} 与A有相同特征值.

△ 有相同特征值的矩阵未必相似.(Quiz)

例子: 补充题 T3 中的 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$ 不可对角化, 即 $A \nsim \begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是A的特征值.

△ 相似与对角化的关系.

A可对角化 $\Leftrightarrow$ A相似于某个对角阵

A与B对角化成同一个对角阵 $\Rightarrow$ A与B相似 (用相似的传递性)

$\not\Leftarrow$ (Quiz) 反例: $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$ 不可对角化

所有与A相似的矩阵都不可对角化.

(注意 可对角化 $\Leftrightarrow$ 相似于某个对角阵)

• 正规矩阵

[Def] 若 $A^HA=AA^H$，则称 A 是正规矩阵 (normal matrix)

[Exp] Hermitian; real symmetric; skew-Hermitian ($A=-A^H$); unitary ……

[Fact] 正规矩阵可以酉对角化

[Rmk] 这个 Fact 说明正规矩阵 $E(A,\lambda_1)\perp E(A,\lambda_2)$ if $\lambda_1\neq\lambda_2$.

• 一些整理

① Schur 引理：任何复方阵都可以酉相似于一个上三角阵. 即 $\forall A\in M_n(\mathbb{C})$, $\exists$ unitary U s.t. $U^{-1}AU$ 是上三角.

② Spectrum thm (谱定理)：任何厄米矩阵可以酉对角化 (即酉相似于某个对角阵)

即 $\forall A\in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $A^H=A$，则存在 unitary U, s.t. $U^{-1}AU$ 是对角阵.

(若 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 满足 $A^T=A$，则存在 orthogonal Q, s.t. $Q^{-1}AQ$ 是对角阵)

③ A 是正规矩阵 ($AA^H=A^HA$)，则 A 可以酉对角化 (酉相似于一个对角阵)

④ 任何矩阵 A 都可以相似到若尔当标准型 (Jordan form)

分块对角

39. Prove in three steps that A^{T} *is always similar to* A (we know that the λ's are the same, the eigenvectors are the problem):

(a) For $A=$ one block, find $M_i=$ permutation so that $M_i^{-1}J_iM_i=J_i^{\mathrm{T}}$.

(b) For $A=$ any J, build M_0 from blocks so that $M_0^{-1}JM_0=J^{\mathrm{T}}$.

(c) For any $A=MJM^{-1}$: Show that A^{T} is similar to J^{T} and so to J and to A.

(a) $M_i=\begin{bmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ s.t. $M_i^{-1}J_iM_i=J_i^T$

(b) Let $A=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r\end{bmatrix}$. 由 (a)，对 $\forall J_i$ 找 M_i s.t. $M_i^{-1}J_iM_i=J_i^T$.

令 $M_0=\begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_r\end{bmatrix}$，$M_0^{-1}AM_0=\begin{bmatrix} M_1^{-1}AM_1 & & & \\ & M_2^{-1}AM_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_r^{-1}AM_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_1^T & & & \\ & J_2^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r^T\end{bmatrix}$

$=A^T$

(c) $A=MJM^{-1}\Rightarrow A^T=(MJM^{-1})^T=(M^T)^{-1}J^TM^T\Rightarrow A^T\sim J^T$ ①

$A^T\underset{①}{\sim}J^T\underset{(b)}{\sim}J\underset{\text{题目给的}}{\sim}A$，由相似关系的传递性，$A^T\sim A$.

1. 证明：n 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-\lambda & 1 & \cdots & & 1 \\ n-\lambda & 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 1-\lambda & & \vdots \\ n-\lambda & 1 & & \ddots & 1-\lambda \end{vmatrix} = (n-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 1-\lambda & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda = n \text{ 是一个特征值}$$

$r(A)=1 \Rightarrow \dim(N(A)) = n - r(A) = n-1$. 由于 $N(A)=E(A,0)$, $\dim E(A,0)=n-1$.
故A有n-1个对应于0的特征向量. $\dim E(A,n) \geq 1$, 故A共有n个L.ind.特征向量,
其中n-1个来自$E(A,0)$, 1个来自$E(A,n)$. 故A可对角化,即$A \sim \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}$
B是上三角,故特征值是对角线 0, n. $r(B)=1$,同理得B有n个L.ind.特征向量,
n-1个来自$E(B,0)$, 1个来自$E(B,n)$. 故B也可对角化,即$B \sim \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix}$.
由相似关系的传递性 $A \sim B$.

- Jordan Form

Motivation：很多线性变换不能对角化,我们希望找一组基,使该线性变换在这组基下有尽可能简单的形式,即 Jordan 标准型.

求Jordan标准型 先考虑 special case 幂零变换的 Jordan form
再考虑 general case 一般线性变换的 Jordan form.

[Def] 记 $J_k(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix}$ ← k阶方阵 对角线是λ

[Def] 设N是V上的线性变换. 若$\exists r\in\mathbb{N}^*$ s.t. $N^r=0$, 则称N是一个幂零变换.

[prop] 幂零变换特征值是0.

pf: N是幂零变换 $\Rightarrow \exists r$, s.t. $N^r=0 \Rightarrow$ 设$Nv=\lambda v$. $N^r v=\lambda^r v=0 \Rightarrow \lambda^r=0 \Rightarrow \lambda=0$.

假设N在基$\mathcal{B}$下是Jordan form, 则基$\mathcal{B}$具有如下性质:

[prop] 设N在基$\mathcal{B}$下的矩阵为 $J=\begin{bmatrix}J_{m_1}(0) & & & \\ & J_{m_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_r}(0)\end{bmatrix}$ ← r个 Jordan block 每个 Jordan block 是m_i阶方阵 $\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}$

将基$\mathcal{B}$分组为 $\mathcal{B}=(\underbrace{\mathcal{B}_1}_{m_1个}\ \underbrace{\mathcal{B}_2}_{m_2个}\cdots\underbrace{\mathcal{B}_r}_{m_r个})$ ← 由m_i个向量构成子空间的基才能出现$m_i\times m_i$的Jordan block

1. 对$\mathcal{B}_i$中的向量做标记 $\mathcal{B}_i=w_{i1},w_{i2},\dots,w_{im_i}$

取每组第一个向量 $w_{11},w_{21},\dots,w_{r1}$

第2组$\mathcal{B}_2$的第1个向量

共有r组,每组取第一个,因此取出r个向量.

这r个向量构成 $\ker(N):=\{v\in V\mid Nv=0\}=E(N,0)$ 的基.

☆若当块的个数 $r=\dim E(N,0)$

2. 对每个$\mathcal{B}_j$, 按序可写作

$$w_{j1}=N^{m_j-1}v_j,\ \underset{w_{j2}}{\underset{\parallel}{N^{m_j-2}v_j}},\ \dots,\ \underset{w_{j\,m_j-1}}{\underset{\parallel}{Nv_j}},\ \underset{w_{j\,m_j}}{\underset{\parallel}{v_j}}.$$

☆若当基的每一组,都是由该组最后一个向量通过作用N得到.

☆ $N|_{\mathrm{span}(\mathcal{B}_j)}$ 的幂零阶是 m_j

[Rmk] ← 讨论 special case 幂零变换

幂零变换若当基,
按块分组排整齐。← 按 $m_1,m_2,\dots,m_r$ 分组
每组第一充核内,← 每组第一构成$E(N,0)$的基
末位淘汰生像集。← 每组都由N作用生成

— 胡勇

[Rmk] 求解幂零变换 Jordan 块的过程

1. 求最大块 Jordan 块阶 M：它等于 $\mathcal{N}$ 的幂零阶（最小 r s.t. $\mathcal{N}^r=0$）
2. 最小块 Jordan块阶 m： m+1是满足不等式 $\mathrm{rank}(\mathcal{N}^j)\neq \dim W - j\dim\ker\mathcal{N}$ 的最小正整数.
3. 对每个 $k\in[\![m,M]\!]$，记 S_k 为 J 中阶为k的 Jordan 块数量

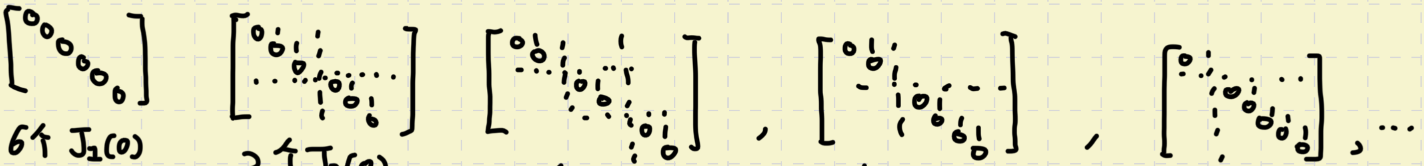
   $S_k=\mathrm{rank}(\mathcal{N}^{k-1})+\mathrm{rank}(\mathcal{N}^{k+1})-2\mathrm{rank}(\mathcal{N}^k)$
4. Jordan 块总数：它等于 $\dim E(\mathcal{N},0)$

3,4一般结合求解.

不考，但是最好知道一下我们有公式可以计算最大Jordan块阶数、最小Jordan块阶数，Jordan 块总数，阶为k的Jordan 块个数. □

下面问题是简单且必须掌握的.

★Q: 假设J是6阶的Jordan型且特征值全是0，问J一共有几种可能的形式?



6个 $J_1(0)$, 2个 $J_3(0)$, 3个 $J_2(0)$, 一个 $J_2(0)$，一个 $J_4(0)$, $J_1(0)$ 与 $J_5(0)$, …

General case 若 $\mathcal{A}$ 不是幂零变换?

[Def] $G(\mathcal{A},\lambda):=\{v\in V\mid \exists k\in\mathbb{N}^* \text{ s.t. } (\lambda I-\mathcal{A})^k v=0\}$ 称为广义特征子空间.

[prop] $E(\mathcal{A},\lambda)=\{v\in V\mid(\lambda I-\mathcal{A})v=0\}\subseteq G(\mathcal{A},\lambda)$.

[Rmk] $\dim E(\mathcal{A},\lambda)$ = 几何重数. $\dim G(\mathcal{A},\lambda)$ = λ 的代数重数.

由包含关系有 几何重数 ≤ 代数重数.

[prop] 对任意V上线性变换 $\mathcal{A}$，V有直和分解 $V=G(\mathcal{A},\lambda_1)\oplus\cdots\oplus G(\mathcal{A},\lambda_r)$

[prop] $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $E(\mathcal{A},\lambda_i)=G(\mathcal{A},\lambda_i)$, $\forall i$.

$\mathcal{A}$ 不是V上的幂零变换，但 $(\mathcal{A}-\lambda_i I)|_{G(\mathcal{A},\lambda_i)}$ 是幂零变换（$G(\mathcal{A},\lambda_i)$ 由满足存在k, s.t. $(\mathcal{A}-\lambda_i I)^k v=0$ 的向量v构成）. 对 $\mathcal{A}-\lambda_i I$ 在 $G(\mathcal{A},\lambda_i)$ 上找 Jordan 基 $\mathcal{B}_i$ 和基下Jordan型矩阵 J_i. 则 $\mathcal{A}|_{G(\mathcal{A},\lambda_i)}$ 在基 $\mathcal{B}_i$ 下的矩阵恰是 $\lambda_i I+J_i$.

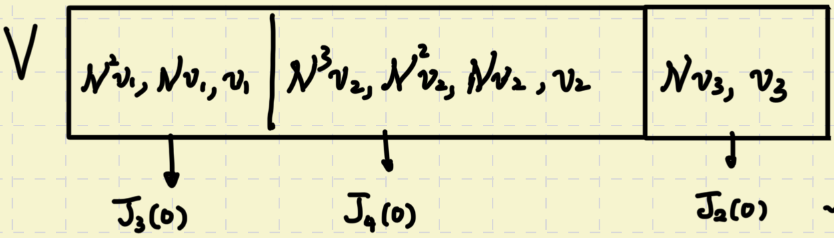
由 $V=\bigoplus_i G(\mathcal{A},\lambda_i)$，我们在 $G(\mathcal{A},\lambda_i)$ 找的基 $\mathcal{B}_i$ 排成V的基.

★若 $\mathcal{A}$ 有s个 l.ind. 特征向量，则 $\mathcal{A}$ 有s个 Jordan block.

这是因为：$\mathcal{A}-\lambda_i I|_{G(\mathcal{A},\lambda_i)}$ 上的 Jordan 块个数等于 l.ind. 特征向量个数，等于 $\mathcal{A}|_{G(\mathcal{A},\lambda_i)}$ 在 $G(\mathcal{A},\lambda_i)$ 上对应于 λ_i 的 l.ind. 特征向量个数. ($E(\mathcal{A}-\lambda_i I,0)=E(\mathcal{A},\lambda_i)$)

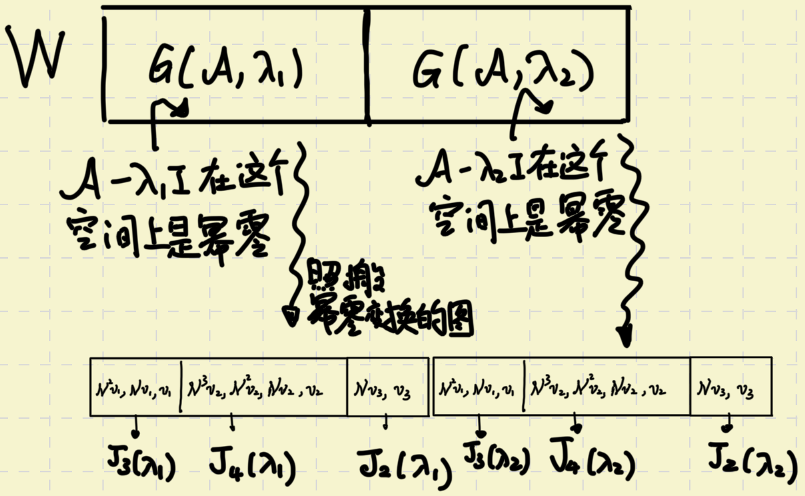
picture:

幂零变换



$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} J_3(0) & & \\ & J_4(0) & \\ & & J_2(0) \end{bmatrix}$$

General 变换



$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} J_3(\lambda_1) & & & & & \\ & J_4(\lambda_1) & & & & \\ & & J_2(\lambda_1) & & & \\ & & & J_3(\lambda_2) & & \\ & & & & J_4(\lambda_2) & \\ & & & & & J_2(\lambda_2) \end{bmatrix}$$