Week10 习题课.

- 解ODE：分离 dy和dt变成 $f(y)dy = f(t)dt$ 的形式.

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{1}{y}dy = kdt$$

$$\Rightarrow \ln|y| = kt + C$$

$$\Rightarrow |y| = e^{kt}e^{C}$$

$$\Rightarrow y = Ae^{kt}$$

例

$$y(x+1)dy = x(y^2+1)dx$$

$$\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{xdx}{x+1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{y^2+1} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)d(x+1)$$

两边积分

$$\frac{1}{2}\ln|y^2+1| = x+1 - \ln|x+1| + C$$

△例

$$2x+y^2+2xy\cdot y' = 0$$

x与y不可分离. 但是令$\psi(x,y) = x^2+xy^2$

则有 $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2x+y^2$　$\frac{\partial\psi}{\partial y} = 2xy$.

即原方程化为 $\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$

即 $\frac{d}{dx}\psi(x,y) = 0$. 于是 $\psi(x,y) = C$

我们得到隐式解 $\psi(x,y) = x^2+xy^2 = C$

- 二阶常系数齐次微分方程

$$y''+py'+qy=0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y + p\frac{d}{dx}y + qy = 0$$

线性算子 $\frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q \overset{作用}{\curvearrowright} V = \{函数空间\}$

求方程的通解就是求线性空间

求征值为0的特征子空间(去找该空间的基)

这个特征子空间的每一个向量(函数)

都是方程的解. ⟹ 线代中$Ax=0$问题.

△为什么令 $y = e^{rx}$

$$\frac{d}{dx}e^{rx} = re^{rx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{rx} = r^2e^{rx}$$

⟿ e^{rx} 是现成的 $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$ 的特征向量.

令 $y = e^{rx}$, 得方程

$$r^2+pr+q=0$$

① 若有两个不等实根 r_1, r_2

则我们找到了两个特征子空间的线性无关[1]的解 e^{r_1x} 与 e^{r_2x}.

基的叠加可以得到所有解(通解)

$$y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$$ [2]

② 若有两个相等实根 $r_1 = r_2 = r$

则我们只得到一个线性无关的解 e^{rx}.

为了得到另一个与 e^{rx} 线性无关的向量, 我们取 xe^{rx}.

易证 $\frac{d^2}{dx^2}xe^{rx} + p\frac{d}{dx}xe^{rx} + qxe^{rx} = 0$

故 xe^{rx} 也是方程的解.

③ 若有一对共轭复根($\Delta<0$)
(一对共轭)

$r_1=\alpha+i\beta,\ r_2=\alpha-i\beta.$

我们得到两个线性无关解

$$e^{r_1x}=e^{\alpha}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$e^{r_2x}=e^{\alpha}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

这两个线性无关向量组合成如下两个向量还是线性无关的

$$\frac{e^{r_1x}+e^{r_2x}}{2},\qquad \frac{e^{r_1x}-e^{r_2x}}{2i}$$

$$\Downarrow\qquad\qquad\qquad\Downarrow$$

$$e^{\alpha}\cos\beta x\qquad\qquad e^{\alpha}\sin\beta x$$

因此通解是基的叠加 $y=Ae^{\alpha}\cos\beta x+Be^{\alpha}\sin\beta x.$

△解决上面两个问题.

[1] 当$r_1\neq r_2$, e^{r_1x}与e^{r_2x}线性无关?

类比线性代数中的线性无关定义,我们可以写下两个函数线性无关的定义

Def: 称$f(x)$与$g(x)$线性无关,若

$a f(x)+b g(x)=0$,对所有定义域内的x成立

则 $a=b=0$

现在假设有 $ae^{r_1x}+be^{r_2x}=0$, $\forall x\in$成立.

既然上式对所有x成立,取特殊值就可以了.

令 $x=0\Rightarrow a+b=0$

令 $x=1\Rightarrow ae^{r_1}+be^{r_2}=0\Rightarrow ae^{r_1}-ae^{r_2}=0$

即 $a(e^{r_1}-e^{r_2})=0$

由于$e^{r_1}\neq e^{r_2}\Rightarrow a=b=0.$

因此e^{r_1x}与e^{r_2x}确实线性无关.

*同理,可以证e^{rx}与xe^{rx}线性无关.

$$ae^{rx}+bxe^{rx}=0$$

$x=0\Rightarrow a=0$

$x=1\Rightarrow ae^{r}+be^{r}=0\Rightarrow b=0$

[2] 为什么Ο特征子空间维数是2,即为什么找到两个线性无关的函数一叠加就可以得到所有解?

为了通俗易懂(实际是我也不懂,太多了orz),这里用一些直觉性的、不严谨的说法.如果你觉得不自然,也很正常.

方程中出现了二阶导,所以直觉上看解微分方程要做2次求导的逆操作,即积两次分.每次积分出一个常数,积2次分要多2个常数.每个常数要一个初条件才能将值确定.

对于二阶常系数微分方程,需要2个初条件才能将解确定下来.所以解的自由度是2,也就是我们需要找二个线性无关的函数作为基就能张成全部空间(张成的含义是表出空间中任何一个向量)

- Schrödinger 方程与分离变量法.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Psi$$

$$\Psi(\vec{x},t)=\Phi(\vec{x})T(t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(\vec{x})T(t)\right)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\left(\Phi(\vec{x})T(t)\right)+V\Phi(\vec{x})T(t)\right]$$

$$\Phi(\vec{x})\,i\hbar\frac{d}{dt}T(t)=T(t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi(\vec{x})\right)+V\Phi(\vec{x})T(t)$$

$$\frac{i\hbar}{T(t)}\frac{d}{dt}T(t)=\frac{1}{\Phi(\vec{x})}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi(\vec{x})+V\Phi(\vec{x})\right]$$

• [prop] A, B 可对角化. $AB = BA \Leftrightarrow$ A, B 可用相同 eigvector matrix S 做对角化.
$\Leftrightarrow$ A, B 有相同特征向量

pf: $\Leftarrow$ $A = S\Lambda_1 S^{-1}$, $B = S\Lambda_2 S^{-1}$,

$$AB = S\Lambda_1 S^{-1} S\Lambda_2 S^{-1} = S\Lambda_1\Lambda_2 S^{-1} = S\Lambda_2\Lambda_1 S^{-1} = S\Lambda_2 S^{-1} S\Lambda_1 S^{-1} = BA$$

$\Rightarrow$ Assume $AB = BA$. 设 $x \in E(A, \lambda)$, 即 $Ax = \lambda x$.

$ABx = BAx = \lambda Bx \Rightarrow Bx \in E(A, \lambda)$.

即 B 是 $E(A,\lambda)$ 上的变换, 即有线性变换 $L_B: E(A,\lambda) \longrightarrow E(A,\lambda)$
$x \longmapsto Bx$

A 可对角化, 则 $\mathbb{R}^n = E(A,\lambda_1) \oplus E(A,\lambda_2) \oplus \cdots \oplus E(A,\lambda_k)$, $n = \sum_{i=1}^{k} \dim E(A,\lambda_i)$

而 B 是 $E(A,\lambda_i)$ 上的变换, 因此 B 在 $E(A,\lambda_i)$ 上有 $\dim(E(A,\lambda_i))$ 个特征向量, 否则 B 没有足够多 l.ind. 特征向量无法对角化. 由于这 $\dim(E(A,\lambda_i))$ 个特征向量都来自于 $E(A,\lambda_i)$, 故 B 的特征向量就是 A 的特征向量.

• 复线性空间上的内积是 $\bar{x}^T y$ (x 共轭转置再乘 y)

Δ 为什么需要共轭 $\bar{x}^T y$?

Recall:

[定义]: 令 V 是一个线性空间. 称双线性函数 $d: V \times V \to \mathbb{C}$ 是 V 上的内积
若 ① $p(x,x) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $x = 0$ (正定性)
② $d(x,y) = \overline{d(y,x)}$ (共轭对称性)
赋予内积的线性空间是内积空间.

$x, y \in \mathbb{C}^n$, $x^T x \geq 0$ 并不总成立. 例如 $i^T i = -1 < 0$.
$(1+2i)^T(1+2i) = -3 + 4i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ 无法与 0 比较大小

但容易验证 $d(x,y) = \bar{x}^T y$ 满足内积需要的两条性质.
① $\bar{x}^T x = \|x\|^2 \geq 0$, 等号成立 iff $x = 0$
② $\bar{x}^T y = (\bar{x}^T y)^T = y^T \bar{x} = \overline{\bar{y}^T x} \rightsquigarrow d(x,y) = \overline{d(y,x)}$

Δ $\bar{x}^T y = 0 \Leftrightarrow x \perp y$

• 复矩阵 H 称为厄米特的 (Hermitian) 若 $\bar{H}^T = H$. 记 $A^H := \bar{A}^T$

Rmk: $H \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n}\mathbb{C}$, H Hermitian $\Leftrightarrow$ H symmetric

Δ $(AB)^H = B^H A^H$ $\quad \overline{AB}^T = (\overline{AB})^T = \bar{B}^T\bar{A}^T = \bar{B}^T \bar{A}^T = B^H A^H$

Δ [prop] A 是厄米矩阵, 则 A 的所有特征值是实数

pf: $Av = \lambda v \Rightarrow v^H A^H = \lambda^H v^H = \bar{\lambda} v^H$
$\xRightarrow{\text{右乘}v}$ $v^H A^H v = \bar{\lambda} v^H v$ $\quad$ Trick: $v^H A v$ 是常见构造.

$$\xrightarrow{A^H=A} v^HAv=\bar{\lambda}v^Hv \xrightarrow{Av=\lambda v} \lambda v^Hv=\bar{\lambda}v^Hv$$

$\Longrightarrow (\lambda-\bar{\lambda})v^Hv=0.$ v是特征向量，$v\neq 0$ 故 $v^Hv\neq 0$

$\Rightarrow \lambda-\bar{\lambda}=0$ 即 $\lambda\in\mathbb{R}$　　Trick：证 $\lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ 证 $\bar{\lambda}=\lambda$

Rmk：这个性质在物理中有很重要的意义. 可观测量是某个矩阵的特征值，为保证可观测量是实数(实数才可测量)，这个矩阵一般是厄米的.

Rmk：这类证明是如何想到的？（倒着想）

设 $Av=\lambda v$. 欲证 $\bar{\lambda}=\lambda$，即证 $\bar{\lambda}-\lambda=0$.

Trick：证明 $\bar{\lambda}-\lambda$ 乘上一个非零量是0. 这里非零量选 v^Hv.

即证 $(\bar{\lambda}-\lambda)v^Hv=0$, i.e., $\bar{\lambda}v^Hv=\lambda v^Hv$.

等价于证 $(v^HA^H)v=v^HAv$. 由A厄米，显然成立. 按反序写一遍即是证明.

Δ $x^HAx\in\mathbb{R}$　pf: $\underset{\underset{x^HAx}{\|}}{(x^HAx)^H} = \overline{x^HAx} \Rightarrow x^HAx\in\mathbb{R}$

- 正交对角化.

[prop] 设A是 Hermitian matrix，即 $A^H=A$. $\lambda_1\neq\lambda_2$ 是A的两个特征值，则 $E(A,\lambda_1)\perp E(A,\lambda_2)$

Pf: $\forall v_1\in E(A,\lambda_1)$, $v_2\in E(A,\lambda_2)$, w.t.s. $v_1\perp v_2$.

$v_2^HAv_1=\lambda_1v_2^Hv_1$. On the other hand, $v_2^HAv_1=v_2^HA^Hv_1=(Av_2)^Hv_1=\underset{\underset{\lambda_2}{\| \because \lambda_2\in\mathbb{R}}}{\lambda_2^H}v_2^Hv_1$

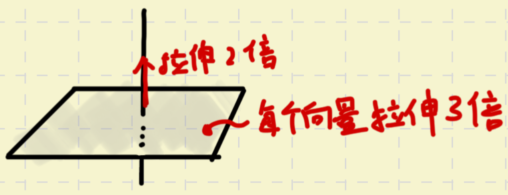
故 $(\lambda_1-\lambda_2)v_2^Hv_1=0$. $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $v_2^Hv_1=0$.

Rmk: w.t.s. $v_2^Hv_1=0$，即证 $\overset{\text{非零量}}{(\lambda_1-\lambda_2)}v_2^Hv_1=0$，即证 $\lambda_1v_2^Hv_1=\lambda_2v_2^Hv_1$

即证 $v_2^HAv_1=v_2^HAv_1$ (这步用了 $\lambda_2\in\mathbb{R}$).

[Exp] $A=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}$ 是实对称阵，也是厄米阵.

$E(A,2)=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$，$E(A,3)=\mathrm{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$



1. $E(A,2)\perp E(A,3)$
2. 同个特征值的向量未必垂直

例如 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\in E(A,3)$，但这两个向量不垂直.

[Thm] 任何实对称矩阵可以对角化.

pf: 换用线性变换的语言叙述一遍:

令 $\mathcal{A}: V\to V$ 是线性变换. $\dim V=n$. 存在 ε 是 V 的一组基, s.t.

$\mathcal{A}$ 在 ε 下的矩阵是实对称矩阵 A, w.t.s. A 可对角化, i.e., $\mathcal{A}$ 有 n 个 L.ind. 特征向量.

对 A 的阶 $(\dim V)$ 做数学归纳法.

当 $n=1$ 时 成立. 假设 $n-1$ 阶实对称矩阵可做对角化, 即 $\dim V=n-1$ 时,
若存在 V 的某组基 ε s.t. 某个线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 ε 下的矩阵是实对称矩阵, 则
$\mathcal{A}$ 有 $n-1$ 个 L.ind. 特征向量.

现设 $\mathcal{A}: V\to V$ 是线性变换, $\dim V=n$. $\mathcal{A}$ 在基 ε 下是实对称阵 A.

Claim: $\mathcal{A}$ 必存在一个非0特征向量 $v_1\in V$.

proof for the claim: 实对称 n 阶矩阵 A 必有 n 个复特征值. A 是厄米矩阵, 它的特征值是实数, 故 A 有 n 个实特征值. 任取一个特征值 λ, $|A-\lambda I|=0$ 得 $\exists\, v\neq 0$ s.t. $(A-\lambda I)v=0$. 这样的 v 即是一个非零特征向量. v 在基 ε 下的向量是 v_1 即是 $\mathcal{A}$ 的一个非0特征向量.

$v_1\neq 0$, 不妨设 $|v_1|=1$.

Claim: 对 $\{v_1\}$ 可以扩为 V 中的一组基 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ s.t. 存在正交阵 Q 满足 $\varepsilon=[v_1,\cdots v_n]Q$.

proof for the claim: 设 $\varepsilon=[\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \cdots\ \varepsilon_n]$. ε 是基 故 v_1 可由 ε 线表, 即 $v_1=a_1\varepsilon_1+\cdots+a_n\varepsilon_n$. 对向量 $\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$, 扩基并做施密特正交化、标准化, 得正交阵 $Q=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots\\ \vdots & \\ a_n & \cdots\end{bmatrix}$ (回顾 Q 是正交阵 $\Leftrightarrow$ Q 的列是 $\mathbb{R}^n$ 标准正交基)

令 $[v_1\ \cdots\ v_n]=\varepsilon Q^{-1}$ 则得满足条件的基 $[v_1\cdots v_n]$ s.t. $\varepsilon=[v_1\cdots v_n]Q$.
(注意 如此构造的 $[v_1\ \cdots\ v_n]$ 必是基, 因为它和基 ε 只相差可逆矩阵)

$$\mathcal{A}[v_1\cdots v_n]=\mathcal{A}\varepsilon Q^{-1}=\varepsilon AQ^{-1}=[v_1\cdots v_n]QAQ^{-1}=[v_1\cdots v_n]QAQ^T$$

故 $\mathcal{A}$ 在基 $[v_1\cdots v_n]$ 下的矩阵为 QAQ^T, 易知 QAQ^T 对称.

On the other hand $\mathcal{A}[v_1\cdots v_n]=[v_1\cdots v_n]\begin{bmatrix}\lambda & * * \cdots\\ 0 & \\ \vdots & B\\ 0 & \end{bmatrix}$.

由 $\begin{bmatrix}\lambda & * * \cdots\\ 0 & \\ \vdots & B\\ 0 & \end{bmatrix}$ 对称知其为 $\begin{bmatrix}\lambda & 0\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & B\\ 0 & \end{bmatrix}$, 故 $\mathcal{A}[v_2\cdots v_n]=[v_2\cdots v_n]B$

因此 $\mathcal{A}$ 可视为 $\mathrm{span}(v_2\cdots v_n)$ 上的线性变换, $\mathcal{A}$ 在基 $[v_2\cdots v_n]$ 上矩阵 B 对称

$\mathrm{span}(v_2,\cdots,v_n)$ 是 $n-1$ 维, 用归纳假设, $\mathcal{A}$ 在 $\mathrm{span}(v_2,\cdots,v_n)$ 上有 $n-1$ 个 L.ind.

向量. 加上 v 得 A 共有 n 个 L.ind. 特征向量.

[Prop] 任何实对称矩阵可以正交对角化.

Pf: 同个特征子空间取标准正交特征向量, 对于不同特征值对应特征向量正交, 可得 n 个标准正交特征向量. 故 $A = Q^{-1}\Lambda Q$, 其中 Q 的每一列是标准正交的特征向量.