Week 10

- 反对称多重线性函数

[定义] 若 $f: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to \mathbb{R}$, 满足
(unformal) $(a_1, \cdots, a_n) \longmapsto f(a_1, \cdots, a_n)$

① f 关于每一个位置是线性的, e.g.,

$f(a_1, ka_2 + la_2', a_3) = kf(a_1, a_2, a_3) + lf(a_1, a_2', a_3)$

② 任意两个位置换序导致反号

$f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n) = -f(a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$

则称 f 是反对称多重线性函数.

定义映射 $\det: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(A_1, \cdots, A_n) \longmapsto \det[A_1\ A_2 \cdots A_n]$

我们发现从映射的观点看行列式就是一个反对称多重线性映射.

- Applications of determinant

① $A^{-1} = \dfrac{C^T}{\det A}$, 其中 $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$, $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 是代数余子式

*此方法可以用于口算二阶矩阵的逆. 但是公式不要背错了, 注意是 C^T 不是 C.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)} \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$$

② Cramer's rule (揭示解的结构)

设 A 可逆, 则 $Ax=b$ 有唯一解. 设唯一解为 x, x 的第 j 个分量, 则

$x_j = \dfrac{\det B_j}{\det A}$ 其中 B_j 是把矩阵 A 的第 j 列替换成 b.

*揭示解的结构, 解大阶方程还是用高斯消元 $[A \vdots b] \to [I \vdots x]$

③ 主元的乘积

[prop] $A=LDU$，则 A_k 的LDU分解正好是 $A_k=L_kD_kU_k$

$\Delta\ \det A_k = |L_k||D_k||U_k| = 1\cdot d_1d_2\cdots d_k\cdot 1 = d_1d_2\cdots d_k$.

这说明A的左上角 $k\times k$ 子矩阵行列式是前k个主元相乘.

Δ 观察有 $\dfrac{\det A_k}{\det A_{k-1}} = \dfrac{d_1d_2\cdots d_k}{d_1d_2\cdots d_{k-1}} = d_k$. 可以通过此公式求A的第k个主元

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1\end{bmatrix}$ 的第2个主元是 $\dfrac{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}}{|1|} = -1$，它的第三个主元是 $\dfrac{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}} = 1$

Δ Recall：做A的LDU分解第一步是做LU分解. LU分解若想不换行，必须主元非零. 观察主元公式 $d_k = \dfrac{\det A_k}{\det A_{k-1}}$，有如下分析：

$d_k\neq 0$ 对 $\forall k=1,2,\cdots,n$ 成立 $\Leftrightarrow \det A_k\neq 0,\ \forall k=1,2,\cdots,n$.

$\Leftrightarrow A_k$ 可逆，$\forall k=1,2,\cdots,n$.

例如 $A=\begin{bmatrix}1&0&\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，$A_2$ 不可逆，因此不可能在不换行情况下做LU分解

*注意，只有A可做LDU分解时才有行列式等于主元乘积.

例如 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$ $\det A = -1 \neq 1\times1\times1\times1 = 1$

③ The volume of a Box

[prop] 设 $A=[A_1\ A_2\ \cdots\ A_n]$，其中 $A_i\in\mathbb{R}^n$. 则 $\det A$ 等于向量 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 所围成的几何体的体积.

Pf: (i) Special case：设A的每一列互相正交，即 $A_i^TA_j=\begin{cases}|A_i|^2 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ (*)

由(*)，我们有 $(A^TA)_{ij} = \sum_k (A^T)_{ik}A_{kj} = \sum_k A_{ki}A_{kj} = \sum_k (A_i)_k(A_j)_k = A_i^TA_j$

故 $A^TA = \begin{bmatrix}|A_1|^2 & & \\ & |A_2|^2 & \\ & & \ddots \\ & & & |A_n|^2\end{bmatrix}$

A_{ki} 矩阵第k行第i列
$(A_i)_k$ 矩阵第i列第k行(第k个分量)
故 $A_{ki}=(A_i)_k$

$\det(A^TA) = |A_1|^2 \cdots |A_n|^2 = (|A_1| \cdots |A_n|)^2 = V^2$，V是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所围成的几何体的体积．另一方面 $\det(A^TA) = \det(A^T)\det(A) = (\det A)^2$

故 $\det A = V$（若 $\det A<0$，体积为负，含义是与我们规定的体积定向相反）

(ii) General Case：设A是任意矩阵．

若A列线性相关，则 $\det A = 0$，此时体积也为0，二者相同．

若A列线性无关，则可做施密特正交化．我们发现对 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 做施密特正交化不改变体积

（相同的底乘相同的高）

而对 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 做施密特正交化也不改变行列式，因为施密特正交化的过程恰是每一列减去某几列的倍数，不改变行列式

$$|A_1\ A_2\ \cdots\ A_n| = |A_1\ \ A_2 - a_1A_1\ \ A_3\ \cdots\ A_n| \qquad \begin{cases} \text{记 } \hat{A}_1 := A_1 \\ \text{记 } \hat{A}_2 := A_2 - a_1A_1 \end{cases}$$

$$= |\hat{A}_1\ \ \hat{A}_2\ \ A_3 - a_2\hat{A}_2 - a_3\hat{A}_1\ \ A_4\ \cdots\ A_n|$$

$$\cdots$$

$$= |\hat{A}_1\ \hat{A}_2\ \cdots\ \hat{A}_n| = V_{\hat{A}_1, \cdots, \hat{A}_n} = V_{A_1, \cdots, A_n}$$

其中 $\hat{A}_1, \cdots, \hat{A}_n$ 每一列正交，reduced到第一种特殊情况.

HW

T2. 实上三角正交阵是对角阵且对角元是±1

Pf: 设U是实上三角正交阵，则 $U^TU=I$，故 $U^T=U^{-1}$.

L.H.S. $=U^T$ 是一个下三角. R.H.S. $=U^{-1}$ 是上三角.

U^{-1} 既是上三角又是下三角，故 U^{-1} 是对角矩阵. U是对角阵的逆，也是对角阵.

设 $U=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$. 由于U是正交矩阵，每一列模长是1，故对角元 $d_i=\pm1$

4. 证明：任何一个 n 阶可逆实方阵 A 都可以表为一个实正交方阵 Q 和一个对角元全为正数的上三角方阵 R 的乘积，即

$$A=QR.$$

而且这种表示法唯一.

Pf: (存在性) A可逆 故可作QR分解 $A=Q\cdot R$. 设 $\exists\, i$, s.t. 对角元 $R_{ii}<0$.

则我们把矩阵Q的第i列乘上 -1 得到修正后的 $\tilde{Q}$. 此时 $A=\tilde{Q}\tilde{R}$，$\tilde{R}_{ii}>0$.

重复此步骤可将R的对角元全变为正数.

(有没有可能 $\exists\, j$, $R_{jj}=0$? 不可能. 否则 $\det A=\det Q\cdot \underbrace{\det R}_{(对角元乘积)}=\det Q\cdot 0=0$

(唯一性). 设 $A=Q_1R_1=Q_2R_2$ 是两种满足要求的QR分解.

$|A|=|Q_1||R_1|=|Q_2||R_2|$. 由于 $|A|\neq0$，可知 $|Q_1|,|R_1|,|Q_2|,|R_2|\neq0$. 故它们都可逆.

$Q_1R_1=Q_2R_2 \Rightarrow Q_2^{-1}Q_1=R_2R_1^{-1}$

L.H.S. $=Q_2^{-1}Q_1$ 是实正交矩阵，R.H.S. $=R_2R_1^{-1}$ 是上三角.

因此 $R_2R_1^{-1}$ 是实上三角正角阵，由T2 它是对角元为±1的对角阵.

设 $R_2R_1^{-1}=\Lambda$，$\Lambda_{ii}=1$ 或 -1，$i=1,2,\cdots,n$. 假设 $\exists\, j$, s.t. $\Lambda_{jj}=-1$.

由 $R_2R_1^{-1}=\Lambda$ 得 $R_2=\Lambda R_1$. 故 $(R_2)_{jj}=\sum_k \Lambda_{jk}(R_1)_{kj}=\Lambda_{jj}(R_1)_{jj}=-(R_1)_{jj}$

但 $(R_1)_{jj}$ 与 $(R_2)_{jj}$ 由构造都大于0，矛盾.

因此 $\Lambda_{ii}=1$，$i=1,2,\cdots,n$ 即 $\Lambda=I$. 因此 $Q_2^{-1}Q_1=R_2R_1^{-1}=I$，

即 $Q_2=Q_1$，$R_2=R_1$，即QR分解唯一.

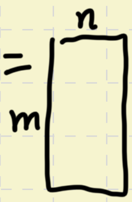
1. 设 A 是秩为 n 的 $m \times n$ 矩阵, 在 Matlab 里面, $[Q, R] = qr(A)$ 命令得到一个方阵 Q 和一个 $m \times n$ 的矩阵 R:

$$\text{MATLAB 得到的因子为 } (m \times m)(m \times n) \quad A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Q 的前 n 列 Q_1 是矩阵 A 的哪个基本子空间的一组标准正交基？

(b) Q 的后 $m-n$ 列 Q_2 是矩阵 A 的哪个基本子空间的一组标准正交基？

(b)问的思路

$A=$  有n个L.ind. m维向量

$$\Big\downarrow \text{正交化 归一化}$$

Q_1 $m \times n$矩阵，每一列正交归一

注意到 $\mathbb{R}^m = \underbrace{C(A)}_{Q_1\text{是}C(A)\text{标准正交基}} \oplus \underbrace{N(A^T)}_{Q_2\text{是}N(A^T)\text{标准正交基}}$

由 $C(A)$, $N(A^T)$ 互相正交，有 $[Q_1 \ Q_2]$ 是正交矩阵.

A的列向量落在 $C(A)$ 中，在 $N(A^T)$ 上分量是0，这是 $\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ 中的0矩阵的来源.

证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D|$

(a)

[Fact] $\begin{vmatrix} A & \\ & I \end{vmatrix} = |A|$ (Big formula 展开即可)

$\begin{vmatrix} I & \\ & A \end{vmatrix} = |A|$

(i) 若D的行线性相关，则 $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 有线性相关行，L.H.S. $=0$.
由于D行相关，故 $|D|=0$. 于是 R.H.S. $=0$. 等式成立.

(ii) 若D的行线性无关，则D满秩，即D有逆 D^{-1}.

考虑恒等式 $\begin{bmatrix} I & \\ & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$

两边取行列式得 $|D^{-1}| \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A|$

由 $|D^{-1}| = |D|^{-1}$, $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A| \, |D|$

1. If you know all 25 cofactors of a 5 by 5 invertible matrix A, how would you find A?

✱ $\det A=\sum_j a_{ij}C_{ij}$，但是 a_{ij} 未知，因此"先求 $A^{-1}=\frac{C^T}{|A|}$，再求 A" 答案错误.

✱ $|A|=\sqrt[4]{|C|}$，但是 $|A|=+\sqrt[4]{|C|}$ 还是 $|A|=-\sqrt[4]{|C|}$？(作业未批改出来)

key：A 可逆，故 $A^{-1}=\frac{C^T}{\det A}=:kC^T$，$k\neq 0$.（$k$ 未知，是需要求的）

$A=\frac{1}{k}(C^T)^{-1}$.　对矩阵 A 计算 C_{11} 得到含 k 的一次方程，则可解出 k.

k 已知则 A 可求

2. A function $\delta:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ is called an ***n*-linear function** if it is a linear function of each row of an $n\times n$ matrix when the remaining $n-1$ rows are held fixed. And an n-linear function

$$\delta:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$$

is called **alternating** if, for each $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, we have $\delta(A)=0$ whenever two adjacent rows of A are identical. Suppose δ is an alternating n-function such that $\delta(I)=1$. Show that:

(a) If $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ and B is a matrix obtained from A by interchanging any two rows of A, then $\delta(B)=-\delta(A)$.

(b) For any $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, we have $\delta(AB)=\delta(A)\cdot\delta(B)$.

(c) $\delta(A)=\det(A)$ for every $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) 令 $A=\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$，设 $B=\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$ 是 A 交换第 i 行与第 j 行.

(✱ $\cancel{\delta(A+B)=\delta(A)+\delta(B)}$ ✗ 从(c)问得知 δ 是行列式，行列式都没有的性质 δ 很可能没有.

[Exp] $\delta\begin{bmatrix}v_1+v_1\\ v_2+v_2\\ v_3+v_4\\ v_4+v_3\end{bmatrix}=\delta\begin{bmatrix}2v_1\\ 2v_2\\ v_3\\ v_4\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}2v_1\\ 2v_2\\ v_4\\ v_3\end{bmatrix}=4\delta\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{bmatrix}+4\delta\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_4\\ v_3\end{bmatrix}$　(不要想当然猜一个结论至少先证明一下))

由多重线性性，$\delta\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_i+v_j\\ \vdots\\ v_j+v_i\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\delta\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_j+v_i\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_j+v_i\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\delta\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$

两行相同为0.

$+\delta\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\delta\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}=\delta(A)+\delta(B)$

两行相同为0

On the other hand, $\delta\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i+v_j \\ \vdots \\ v_i+v_j \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}=0$，因为第i行与第j行相同.

故 $0=\delta(A)+\delta(B) \Rightarrow \delta(A)=-\delta(B)$

(b) & (C)

$$\delta(AB)=\delta\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}\right)$$

$$=\delta\left(\begin{bmatrix} a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1n}B_n \\ \vdots \\ a_{n1}B_1+a_{n2}B_2+\cdots+a_{nn}B_n \end{bmatrix}\right)$$

详见 Remark 1

$$=\sum_{(j_1,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\,\delta\begin{bmatrix} B_{j_1} \\ \vdots \\ B_{j_n} \end{bmatrix}$$

$(j_1,\cdots,j_n)$ 是所有排列

详见 Remark 2

$$=\sum_{(j_1,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\,\delta\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}$$

$$=\delta\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}\underbrace{\sum_{(j_1,\cdots,j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}}_{=\det A}$$

$$=\left(\delta\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}\right)\det A$$

在 $\delta(AB)=\left(\delta\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}\right)\det A$ 中令 $B=I$ 则 $\delta(A)=\underbrace{\delta(I)}_{=1}\cdot\det A=\det A$

因此 $\delta(A)=\det A$. 由于 $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, 有 $\delta(AB)=\delta A\cdot\delta B$.

Remark 1: $\delta\left(\begin{bmatrix} a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1n}B_n \\ \vdots \\ a_{n1}B_1+a_{n2}B_2+\cdots+a_{nn}B_n \end{bmatrix}\right) = \sum\limits_{\substack{(j_1,\cdots,j_n) \\ \text{是所有排列}}} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\,\delta\begin{bmatrix} B_{j_1} \\ \vdots \\ B_{j_n}\end{bmatrix}$

$\delta\left(\begin{bmatrix} a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1n}B_n \\ \vdots \\ a_{n1}B_1+a_{n2}B_2+\cdots+a_{nn}B_n \end{bmatrix}\right)$ 保持2到n行不动，则关于第一行是线性映射

提 按第一行展开

$$= \underbrace{a_{11}\delta\left(\begin{bmatrix} B_1 \\ a_{21}B_1+\cdots+a_{2n}B_n \\ \vdots \\ a_{n1}B_1+a_{n2}B_2+\cdots+a_{nn}B_n \end{bmatrix}\right)}_{\text{Part 1}} + \underbrace{a_{12}\,\delta\left(\begin{bmatrix} B_2 \\ a_{21}B_1+\cdots+a_{2n}B_n \\ \vdots \\ a_{n1}B_1+\cdots+a_{nn}B_n \end{bmatrix}\right)}_{\text{Part 2}}$$
$$+\cdots+ \underbrace{a_{1n}\,\delta\left(\begin{bmatrix} B_n \\ a_{21}B_1+\cdots+a_{2n}B_n \\ \vdots \\ a_{n1}B_1+\cdots+a_{nn}B_n \end{bmatrix}\right)}_{\text{part n}}$$

对于 part 1，我们保持除第2行外的行不动，拆第2行.

$$\text{part 1} = a_{11}\,\delta\left(\begin{bmatrix} B_1 \\ a_{21}B_1\cdots+a_{2n}B_n \\ \vdots \\ a_{n1}B_1+\cdots+a_{nn}B_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_{11}\left[a_{21}\,\underbrace{\delta\begin{pmatrix} B_1 \\ B_1 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{不能重复选择}}} + a_{22}\,\underbrace{\delta\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{解读为第一位选}B_1\text{第二位选}B_2} + \cdots + a_{2n}\,\underbrace{\delta\begin{pmatrix} B_1 \\ B_n \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\text{解读为第一位选}B_1\text{第二位选}B_n}\right]$$

所以 Part 1 包含第一位选 B_1 的所有排列选择

Part 2 包含第一位选 B_2 的所有排列选择.

⋮

Part n 包含第一位选 B_n 的所有排列选择.

注意，第 i位选 B_j 会出现系数 a_{ij}.

Remark 2 $\delta\begin{bmatrix} B_{j_1} \\ \vdots \\ B_{j_n}\end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n\end{bmatrix}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}$

令 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是一个排列，定义逆序数 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 的计算方法：从第一个数开始，往后数比它小的数的个数。例如 $\tau(3\,5\,1\,2\,4) = 2+3+0+0+0=5$

$$\det A = \sum_{\{j_1, j_2, \cdots j_n\}} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$ ，其中求和是对所有排列求和。

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是数字 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个排列，$\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 是逆序数。

$\tau(j_1, \cdots, j_n)$ = 从排列 $\{j_1 \cdots j_n\}$ 换到排列 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 需要的次数。

例如 $35124 \longrightarrow 31524 \longrightarrow 31254 \longrightarrow 31245 \longrightarrow 13245 \longrightarrow 12345$

$\tau(35124) = \underset{\text{数字3移2次}}{2} + \underset{\text{把5移到正序要移3次}}{3} + 0 + 0 + 0$

3. Find the determinant of

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

Where $a_1, a_2, \cdots, a_n$ are nonzero real numbers.

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{第n行每行减第一行}]{\text{第2行到}} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ -a_1 & 0 & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{C_1 \to \frac{a_1}{a_i}C_i + C_1} \begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots+\frac{a_1}{a_n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+a_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_1}{a_j}\right) a_2 a_3 \cdots a_n$$

4. Find the following determinant of order n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

n-1 行

n 行

设题目中的行列式为 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$ (第 i 行 j 列个元, $i \geqslant 2$, 是 x_j^{i-1})

考虑范德蒙行列式 $D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_j - x_i)$

将 D' 按第 $n+1$ 列展开，

$$\det D' = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+n+1} M_{i,n+1} \, x_{n+1}^{i-1}$$

其中 $M_{n,n+1} = \det D$.（$i=n$ 的case）

因此要计算 $\det D'$ 在 x_{n+1}^{n-1} 前的系数.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & & x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

行 n-1+1

列 n+1

$$\det D' = \prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j - x_i) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\left[(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)\right]$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k\right) x_{n+1}^{n-1} + \cdots \text{ 其他项}$$

故由 $(-1)^{2n+1}\det D\, x_{n+1}^{n-1} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k\right) x_{n+1}^{n-1}$

得 $\det D = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$