瑕积分

$$\int_0^2 \frac{dx}{1-x}dx \neq \frac{1}{2}\lim_{t\to 1}\left(\int_0^t \frac{1}{1-x}dx + \int_t^2 \frac{1}{1-x}dx\right)$$

不能这么算!

原因1：没学过这个表达式，不要想当然猜一个来用.

原因2：这个表达式看起来没毛病，实际上是误解了瑕积分的定义.

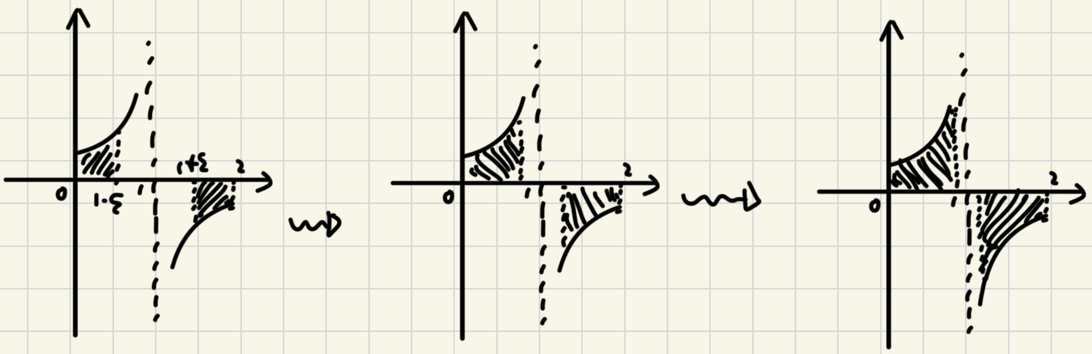
首先瑕积分是一个极限值（这个大家都认同）

那么 瑕积分 $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$ 的值是什么呢？

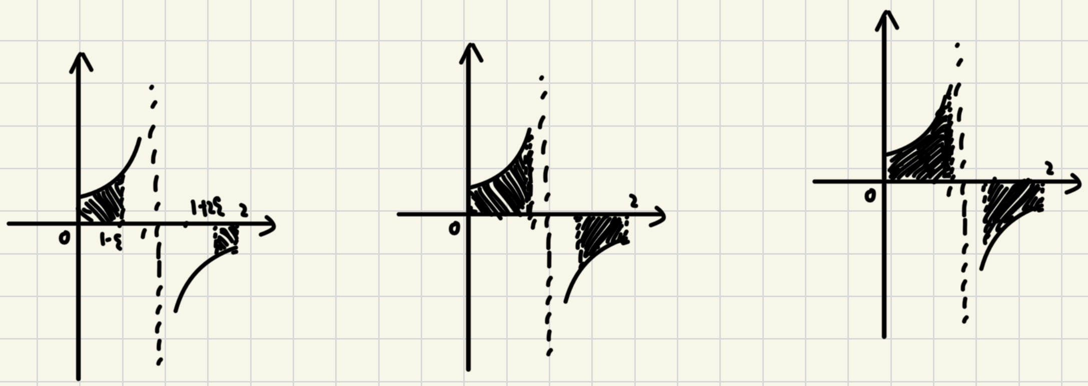
naively，猜 $\int_0^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{1-x} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{1-x}dx \overset{计算}{=} \boxed{0}$

但这只是一种取极限的方式.

这种特殊取极限方式画成图是这样（1的左右两边逼近速度相同）



当然可以用下面这种取极限方式（1的左边逼近地快一点）



此时 $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{1-x}dx + \int_{1+2\varepsilon}^2 \frac{1}{1-x}dx = \boxed{\ln 2}$

所谓的极限值（面积）依赖于取极限的方式，所以积分值是发散的.

(类似无穷积分的情况, week12习题课第1题)

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ 的定义：若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ 存在，则记该极限值为 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

若极限 $\lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)\,dx$ 存在，则记该极限值为 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

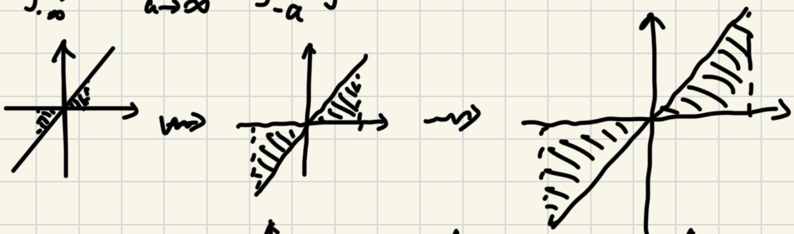
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ 的定义是什么？以下罗列一些常见的、容易想到的定义方式

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ 或者 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

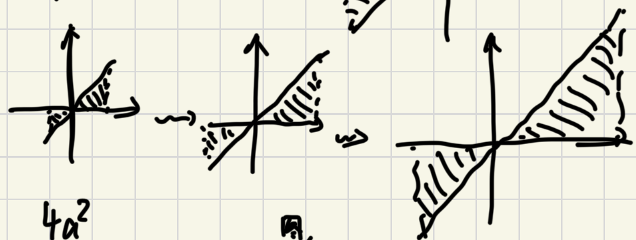
一个好的定义看起来应该是"自然"的，即看起来不特殊。但第一种定义显得太特殊了。

定义 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ 的一个想法是对上限与下限求一个极限，但是以 $-a, a$ 作极限太特殊了。为什么不能是 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{2a} f(x)\,dx$ 呢？

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} x\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a} = 0.$$



$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{2a} x\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{2a} = \lim_{a\to\infty}\frac{4a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = +\infty$$



当然也可以定义 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty}\int_{-2a}^{a} x\,dx = \lim\limits_{a\to\infty}\frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{2} = -\infty$. (图略)

但是这三种定义计算结果都不同，原因在于不同的取极限方式会带来不同的结果.

所以这就从侧面反映出，我们定义的无穷积分应当要和取极限的方法无关.

定义：任取 $a\in\mathbb{R}$，若无穷积分 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 都收敛，则称无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ 收敛

并规定 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

*证明 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 与 a 无关.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx - \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \underline{\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx} + \underline{\underline{\int_c^{a} f(x)\,dx}} + \underline{\underline{\int_a^{c} f(x)\,dx}} + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx - \underline{\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx} - \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= 0$$