Week 9 习题课.

期中选择最后一问:

f 在 $[a,b]$ 上连续、可导, f' 在 (a,b) 上递增. 任取 $c\in(a,b)$.

令 $g(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $h(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$.

证明: $h(x)\le f(x)<g(x)$, $\forall x\in(a,b)$.

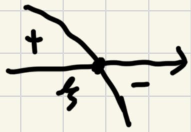
法① 画图.

法② 令 $H(x)=g(x)-f(x)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(x)$

$H'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(x)$

由微分中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

已知 $f'(x)$ 递增, 则 $H'(x)$ 图像如下



故 $H(x)$ 形如

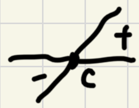
$H(a)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)-f(a)=0$

$H(b)=f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)-f(b)=0$

故 $H(x)>0$, $x\in(a,b)$. 即 $g(x)>f(x)$.

令 $k(x)=f(x)-h(x)$

$k'(x)=f'(x)-f'(c)$. 由 $f'(x)$ 递增, $k'(x)$ 形如



故 $k(x)$ 形如

. 于是 $k(x)\ge k(c)=f(c)-h(c)=0$.

因此 $f(x)\ge h(x)$.

- 字母换干净, 永远注意用哪个字母 (必须做到) (绿色字体不要求)

- 最好不要出现 "∵ ∴ ∀ ∃, s.t. (such that 使得) ⇒ ∈" 这类非正式符号. ∀, ∃ 在公式中可用, 行文中最好别用.

- 最好不要突然蹦出一个表达式但不做任何说明, 读者会不知道你这句话是推导还是题设. 若是题设 请加上 By assumption, 若是推导请注明理由, 如 By xx theorem (如果真的很显然可以酌情不写).

- 公式运算请写明是怎么得到的. 给公式注上 (1), (2) 等序号, "(1)-(2)", "(1)×3", "From (2)" 都要写清楚, 不要让读者猜过程.

- 给出新字母请告诉读者字母的含义, 如 "for any $x\in\mathbb{R}$". 取特殊值英文是 "pick $x=1$".

- 逻辑连词: Hence, Since, therefore, thus, so, because …

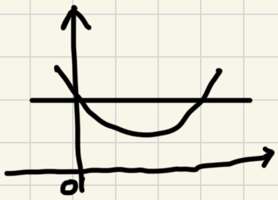
• 单射 one-to-one.（有些地方记作 1-1）

△定义：$f(x)$是定义域为D的函数，若对任意 $f(x_1)=f(x_2)$，$x_1,x_2\in D$ 有 $x_1=x_2$ 则称 f 是单射.

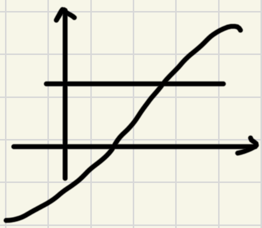
(此定义是课本定义的逆否)

△从定义出发，证一个函数是单射的办法：对任意 $f(x_1)=f(x_2)$，(结合各种条件分析) 最后证明 $x_1=x_2$.

△ 单射的直观图像



不是单射



是单射.

*水平线交图像为一点，则是单射，否则不是.

• 映射（不考）

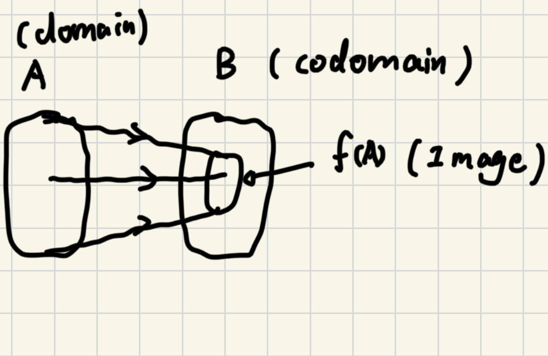
* 映射(map)，是函数(function)的推广.

*Def: 令A,B是两个集合，任意A中元对应一个B中元素，这样的对应关系叫作映射，记作
$$\boxed{\begin{aligned} f: A &\to B \\ a &\mapsto b \end{aligned}}$$
，其中A称为定义域 domain，B称为 codomain，

注意箭号 $\mapsto$ 与 $\to$

$f(A):=\{f(a)\mid\forall a\in A\}$ 称为f的像(Image).

*示意图



例 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto x^2$

domain: $\mathbb{R}$

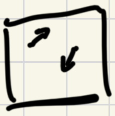
codomain: $\mathbb{R}$

Image: $f(\mathbb{R})=\{x^2\mid x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}_{\geq 0}$

*函数是codomain是$\mathbb{R}$的映射，因此是映射的特殊情况.

*为什么要引入映射这么复杂的概念？

因为实用！理工科学生会碰到场的概念：电磁场、流速场、应力场……

比如流速场  定义域内每一点对应一个速度向量(不是个实数!)

*小总结：希望大家熟悉 $f: A\to B$, $a\mapsto f(a)$ 这个记号

虽然学的是函数，但是有很多地方用到的不是函数，而是映射.

• 单射的例子:

线性代数中的单射以及为什么引入单射这个概念？(不考)

有了映射的概念，我们可以更好地理解线性映射.

线性映射和函数一样，都是映射的特殊情况.

*定义：令V, W是两个线性空间，$A:V\to W$ 是线性空间V到W的一个映射.

用上前面映射的记号　　指明一个对应关系

称 $A:V\to W$ 是一个线性映射，若任意 $v_1, v_2\in V$，$k\in\mathbb{R}$

$$A(v_1+v_2)=A(v_1)+A(v_2)$$

$$A(l v_1)=lA(v_1)$$

Remark：你可能会问线性映射不是一个矩阵吗？矩阵在哪里？

Step 1 选定线性空间V的一组基$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

任意 $v\in V$，$v=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

$$A(v)=A\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \overset{\text{线性变换}}{\underset{\text{的性质}}{=}} \sum_{i=1}^{n} a_i A(b_i)$$

从这个表达式见出，任何线性变换被基处的取值决定.

Step2. 选定W的一组基$\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$

$A(b_i)\in W$ 故 $A(b_i)$可用W的基展开.

$$A(b_i)=\sum_j A_{ji} w_j$$

step3 写成下式（以 $n=2$, $m=3$ 为例）

$$\mathcal{A}[b_1\ b_2]=[w_1\ w_2\ w_3]\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}$$

Remark结束.

*现在给出单线性映射的概念.

定义：令 $\mathcal{A}: V\to W$ 是线性映射. 称 $\mathcal{A}$ 是单射，若任意 $\mathcal{A}(v_1)=\mathcal{A}(v_2)$ 有 $v_1=v_2$.

定义：集合 $\{a\in V \mid f(a)=0\}$ 称为映射 $\mathcal{A}$ 的核，记作 $\ker\mathcal{A}$.

性质：$\mathcal{A}$ 是单射当且仅当 $\ker\mathcal{A}=0$.

证明：$\Rightarrow$ 已知 $\mathcal{A}$ 是单射. 假设存在 $0\neq v\in\ker\mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}v=0$.

又 $\mathcal{A}(0)=0$. 因此 $\mathcal{A}0=\mathcal{A}v=0$ 由于 $\mathcal{A}$ 单，$v=0$，矛盾. 故 $\ker\mathcal{A}=0$

$\Leftarrow$ 已知 $\ker\mathcal{A}=0$. 任意 $\mathcal{A}v_1=\mathcal{A}v_2$. 移项，因 $\mathcal{A}$ 的线性性

得 $\mathcal{A}(v_1-v_2)=0$. 故 $v_1-v_2\in\ker\mathcal{A}=\{0\}$. 因此 $v_1-v_2=0$. 即 $v_1=v_2$,

i.e., $\mathcal{A}$ 单.

练习：证明 $\ker\mathcal{A}$ 是 V 的子空间（证 $\ker\mathcal{A}$ 对加法&数乘封闭）

高代/线代中 $Ax=b$ 的零空间，就是 A 所对应的线性映射的核.

$Ax=b$ 用映射的语言是 $\begin{aligned}\mathcal{A}: V &\longrightarrow W\\ x &\longmapsto Ax\end{aligned}$. 若 $\mathcal{A}$ 是单射，则 $Ax=b$ 就会有唯一解.

（因为 $Ax_1=Ax_2=b$ 会有 $x_1=x_2$）. 所以若 $Ax=b$ 的零空间是 0，则 $Ax=b$ 有唯一解.

* 在学习中我们一定要时常回顾我们在干什么，不要迷失在一堆定义和性质当中.

我们说明了单射不是函数特有的，而是函数的推广：映射所特有的. 当考虑单映射的时候，线性映射就可作为一个特殊的例子.

* 为什么引入单射？

因为单射昭示着“子”的概念。

（若 $\sigma: A\to B$ 是单射则总可在 B 中找到一部分和 A 很像的东西.）

$\mathcal{A}: V\to W$ 是线性映射，则 V 会和 W 的子空间同构

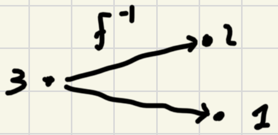
有相同的运算规律.

物理系、计系的同学可以对这个公式留个印象：

$\sigma: G\to H$ 是群同态，$\boxed{G/\ker\sigma\simeq \mathrm{Im}\,\sigma}$

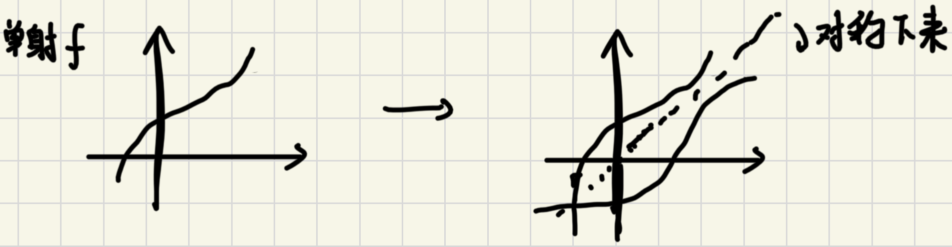
• 单射求逆函数 Inverse.

* 只有单射才可找逆. 比如 $f(1)=f(2)=3$. 则 $f^{-1}(3)$ 可以是 2, 可以是 1.



出现一对多, 就不是逆函数了.

* 找逆的办法: ① 图像



$$(x, y=f(x)) \overset{\text{逆}}{\rightsquigarrow} (y, f^{-1}(y)) \text{ 即 } (y, x)$$

(x,y) 与 (y,x) 关于 $y=x$ 对称.

② 暴力解 把 x 用 y 表示即可.

* 逆函数的求导.

定理: 设 $f(x)$ 在区间 I 上是单射. 若 f 在 I 上可导且 $f'(x)$ 恒非 0.

则 $f^{-1}(x)$ 导数存在, 且满足

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{或写作} \quad \left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{dy}{dx} \\[2ex] f^{-1\prime}(y) = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow f^{-1\prime}(b) = \left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=b} = \dfrac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}} \\[2ex] \qquad\qquad (y=b \Leftrightarrow x=f^{-1}(b)) \end{array}}$$

- $\ln x$ 函数.

定义 $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

性质 $\begin{cases} \ln ax=\ln a+\ln x \\ \ln\frac{b}{x}=\ln b-\ln x \\ \ln\frac{1}{x}=-\ln x \\ \ln x^r=r\ln x \quad , r\in\mathbb{R}. \\ \int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C \end{cases}$

定义 e 是使 $\ln e=\int_1^e \frac{1}{t}dt=1$ 的实数.

① $\int \tan u\,du=\int\frac{\sin u}{\cos u}du=-\int\frac{1}{\cos u}d\cos u$

$=-\ln|\cos u|+C$

$=\ln|\sec u|+C$

② $\int \sec u\,du=\int\frac{1}{\cos u}du=\int\frac{\cos u}{\cos^2 u}du$

$=\int\frac{d\sin u}{(1-\sin u)(1+\sin u)}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-\sin u}+\frac{1}{1+\sin u}d\sin u$

$=\frac{1}{2}\int\frac{-d(1-\sin u)}{1-\sin u}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1+\sin u)}{1+\sin u}$

$=-\frac{1}{2}\ln|1-\sin u|+\frac{1}{2}\ln|1+\sin u|+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin u}{1-\sin u}\right|+C$

③

$\int\cot u\,du$

$=\int\frac{\cos u}{\sin u}du$

$=\int\frac{d\sin u}{\sin u}$

$=\ln|\sin u|+C$

④

$\int\csc u\,du=\int\frac{1}{\sin u}du=\int\frac{\sin u}{1-\cos^2 u}du=\int\frac{-d\cos u}{(1+\cos u)(1-\cos u)}$

$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-\cos u}+\frac{1}{1+\cos u}\,d\cos u=-\frac{1}{2}\int\frac{-d(1-\cos u)}{1-\cos u}-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+\cos u)}{1+\cos u}$

$=\frac{1}{2}\ln|1-\cos u|-\frac{1}{2}\ln|1+\cos u|+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right|+C$

- e^x 函数

$*$ e^x是$\ln x$的逆函数. 即 $y=\ln x$ 则 $x=e^y$

$*$

性质
$$\begin{cases} e^{\ln x}=x & e^{x_1+x_2}=e^{x_1}e^{x_2} \\ \ln e^x = x & e^{-x}=\frac{1}{e^x} \\ \frac{de^x}{dx}=e^x & e^{x_1-x_2}=\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} \\ \int e^x dx = e^x + C. & (e^x)^r = e^{rx}, \ r\in\mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \end{cases}$$

$*$求导 $f(x)=x^x$.

$$f(x)=e^{x\ln x}$$

$$f'(x)=e^{x\ln x}(x\ln x)'=e^{x\ln x}(\ln x+1)$$

$*$求导 $f(x)=a^x$

$$f(x)=e^{x\ln a}$$

$$f'(x)=e^{x\ln a}\cdot\ln a.$$

$*$求导 $f(x)=3^{\sin x}$.

$$f(x)=e^{\sin x\ln 3}$$

$$f'(x)=e^{\sin x\ln 3}\cdot\ln 3\cos x$$

- $\log_a x$ 函数.

$$\begin{cases} \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \\ a^{\log_a x}=x \end{cases}$$

其余性质与$\ln x$类似.

$*$罗列一些以后遇见e函数的例子(不考,高年级会学)

① 伽玛函数与贝塔函数(两个反常积分)

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}\underbrace{e^{-t}}_{e\text{函数}}dt \\ &B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \end{aligned}\right\}$$

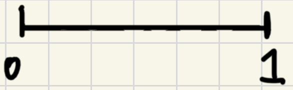
别积,仔积不出来的.

② 泊松分布 [$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 的应用]

$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\cdots$, 表示单位时间内发生k次的概率.

参数λ是单位时间内随机事件平均发生的次数.

Remark:



每隔$\frac{1}{n}$的间隔进行一次判定(看事件是否发生)

单位时间内平均发生λ次. 则每一次成功的概率是$\frac{\lambda}{n}$

(总共n次判定成功λ次).

现在问这n次判定中, 成功k次的概率, 就是

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

现让n趋于无穷大.

$$P(X=k)=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{(n-k)\cdot\frac{-\lambda}{n}\cdot\frac{n}{-\lambda}}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda}}\right]^{\frac{-\lambda(n-k)}{n}}$$

当$n\to\infty$时 $n\approx n-k$ $(10000\approx10000-1)$

$$\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}=\frac{\underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}}{n^k}\approx1$$

每一项都约等于n.

上式 $=\frac{\lambda^k}{k!}\,1\cdot e^{-\lambda}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ 我们得到了泊松分布. ☺

③ 特征值与常微分方程(ODE).

解ODE的办法篇幅过长,这里仅举一例.

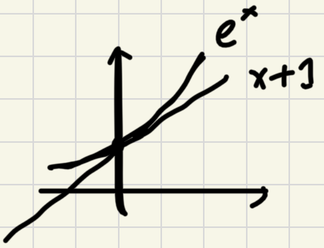
$$y''+3y'+2y=0.$$

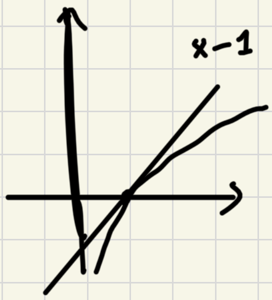
令 $y=e^{rx}$. $r^2e^{rx}+3re^{rx}+2e^{rx}=0$

$$\Rightarrow r^2+3r+2=0 \Rightarrow r=\frac{-1\pm\sqrt{1}}{2} \Rightarrow r_1=0,\ r_2=-1$$

$$y=Ae^{0\cdot x}+Be^{\cdot x}+C.$$ A, B, C arbitrary

* e^x 与 $1+x$. $\ln x$ 与 $x-1$





在0附近

$e^x\approx 1+x$

且 $e^x\geq 1+x$, $x\in\mathbb{R}$

在1附近 $\ln x\approx x-1$

$\ln x\leq x-1$, $x>0$

T50.

$$\int\frac{dx}{1+e^x}$$
$$=\int\frac{e^{-x/2}\,dx}{e^{-x/2}+e^{x/2}}$$
$$=-2\int\frac{e^{-x/2}\,d(-\frac{x}{2})}{e^{-x/2}+e^{x/2}}$$
$$=-2\int\frac{de^{-x/2}}{e^{-x/2}+e^{x/2}}$$

令 $e^{-x/2}=t$

原式 $=-2\int\frac{dt}{t+\frac{1}{t}}$.
$$=-2\int\frac{t\,dt}{t^2+1}$$
$$=-\int\frac{dt^2}{t^2+1}$$
$$=-\ln|t^2+1|+C$$
$$=-\ln|e^{-x}+1|+C$$

T115 $y=(\sin x)^x$
$$=e^{x\ln\sin x}$$
$$\frac{dy}{dx}=e^{x\ln\sin x}\cdot\left(\ln\sin x+x\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

•积分的应用

① 弧长 $dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$

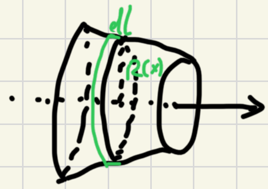
$$L=\underbrace{\int dl=\int\sqrt{dx^2+dy^2}}_{\text{记忆用}}=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

哪个方便用哪个.

②面积

$$A=\underbrace{\int 2\pi R(x)\,dl}_{\text{记忆用}}=\int 2\pi R(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

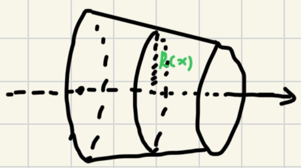
$$A=\underbrace{\int 2\pi R(y)\,dl}_{\text{记忆用}}=\int 2\pi R(y)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$



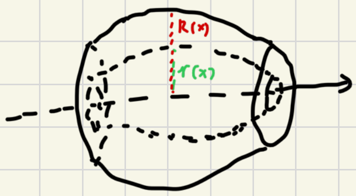
③ 体积

$$V=\int \pi R(x)^2\,dx$$

绕x轴转



$$V=\int \pi\left[R(x)^2-r(x)^2\right]dx$$



Volume by washers

$$V=\int \pi R(y)^2\,dy$$

绕y轴转.

$$V=\int \pi\left[R(y)^2-r(y)^2\right]dy$$

Shell formula

$$V=\int_a^b 2\pi\begin{pmatrix}\text{shell}\\ \text{radius}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{shell}\\ \text{height}\end{pmatrix}dx=\int_a^b 2\pi\,\underset{\text{shell radius}}{\underline{\underline{x}}}\;\underset{\text{shell height.}}{\underline{\underline{f(x)}}}\,dx$$