- $\int f(x)\,dx$ 是x的函数. $\int_a^b f(x)\,dx$ 是与x无关的常数

$\int_{g(s)}^{h(s)} f(x)\,dx$ 是只与s有关的函数.

因此不定积分换元后一定记得换回原来的元.
(定积分换元不用换回原来的)

例. $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta \, d\theta$

$$= \frac{1}{2}\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta \, d2\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int \cot 2\theta \, d\cot 2\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int u\,du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2}+C$$

$$= -\frac{1}{4}\cot^2 2\theta + C$$

八、（10分）求曲线 $y=1+x+\int_0 \cos\left((x-t)\ \right)\,dt$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

九、（6分）求函数 $f(x)=|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$ 的全局极小值（即最小值）

T9.

$$f(x) = \left|\sin x+\cos x + \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right|$$

$$= \left|\sin x+\cos x + \frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\cos x+\sin x}{\cos x\sin x}\right|$$

$$= \left|\sin x+\cos x + \frac{1+\cos x+\sin x}{[(\sin x+\cos x)^2-1]/2}\right|$$

令 $\sin x+\cos x = z \rightsquigarrow z^2 = 1+2\sin x\cos x = 1+\sin 2x \in [0,2]$

故 $z\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. $g(z) = \left|z+\frac{2(1+z)}{z^2-1}\right|$ $z\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 且 $z\neq\pm 1$.

$$g(z) = \left|z+\frac{2}{z-1}\right| = \left|z-1+\frac{2}{z-1}+1\right|$$

$$h(z) = \begin{cases} -z-\frac{2}{z-1} & -\sqrt{2}\le z<1 \\ z+\frac{2}{z-1} & 1<z\le\sqrt{2} \end{cases}$$

$\left(z+\frac{2}{z-1}\right)' = 1-\frac{2}{(z-1)^2}$. 故 $1<z\le\sqrt{2}$,

$z=\sqrt{2}$ 时 $h_{min} = h(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}+2$.

$-\sqrt{2}\le z<1$, $z=1-\sqrt{2}$ 时 $h_{min} = h(1-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-1$.

故 $z=1-\sqrt{2}$ 时 $h_{min} = 2\sqrt{2}-1$.

6. (12 pts) Compute the following integrals:

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx.$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\, dx.$

T6

(1) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$

$\displaystyle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, |\sin x|\, dx$

$\displaystyle = \int_{-\pi/2}^{0} -\sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx + \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx$

$\displaystyle = \int_{-\pi/2}^{0} \sqrt{\cos x}\, d\cos x - \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, d\cos x$

$\displaystyle = \frac{(\cos x)^{3/2}}{3/2}\Big|_{-\pi/2}^{0} - \frac{(\cos x)^{3/2}}{3/2}\Big|_{0}^{\pi/2}$

$= 4/3$

T6 (2)

$\displaystyle\int_{3/2}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\, dx$

$\displaystyle = \int_{3/2}^{4} \frac{\frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{\sqrt{2x+1}}\, dx$

$\displaystyle = \int_{3/2}^{4} \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\, dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_{3/2}^{4} \sqrt{2x+1}\, dx + \frac{1}{2}\int_{3/2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\int_{3/2}^{4} \sqrt{2x+1}\, d(2x+1) + \frac{1}{4}\int_{3/2}^{4} \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\, \frac{(2x+1)^{3/2}}{3/2}\Big|_{3/2}^{4} + \frac{1}{4}\, \frac{(2x+1)^{1/2}}{1/2}\Big|_{3/2}^{4}$

$= 11/3$

7. (12 pts) Find the limits (**Do not use the L'Hopital's rule**):

(1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x^2)^2}$. $= 1/24$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin(x^3)}$. $= 1/2$

T7

(1)

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x^2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1+x)^2(1+\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{(1+x)^2(1+\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})}$$

$t = x^{1/6}$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{1-t^2}{(1+t^6)^2(1+t^3)^2(1-t^3)}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{1+t}{(1+t^6)^2(1+t^3)^2(1+t+t^2)}$$

$$= \frac{1}{24}.$$

T7

(2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin x \cdot \cos x}{\cos x \sin(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x} \cdot \frac{\sin(x)}{\sin(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\sin(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^3}{\sin(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^3}{\sin x^3}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

9. (10 pts) Let f be continuous on $(-\infty, \infty)$ and define $F(x) = \int_0^x xtf(x^2-t^2)\,dt$. Find $F'(x)$.

$$F(x) = x\int_0^x \frac{1}{2} f(x^2-t^2)\,d\,t^2$$

$$= -\frac{x}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\,d(x^2-t^2)$$

$u = x^2-t^2$

$$= -\frac{x}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\,du$$

$$= \frac{x}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du.$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du + f(x^2)\cdot x^2$$

5. (10 pts) Find the linear approximation of $f(x) = \frac{2}{1-x} + \sqrt{1+x}$ at $x = 0$.

$f'(x) = -\frac{2}{(1-x)^{-2}} \cdot (-1) + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 2(1-x)^2 + \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

$f'(0) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

$f(0) = \frac{2}{1} + \sqrt{1} = 3$

$f(x)$在 $x=0$处的线性近似量.

$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = 3 + \frac{5}{2}x$.

填空.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\tan x}{1-\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \frac{1}{\cos x} \sin x}{2\sin^2 x/2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \frac{1}{\cos x} \cdot 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}}{2\sin^2 x/2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x/2}{\sin x/2}$

$= \lim\limits_{x\to 0} 2\frac{x}{2} \frac{1}{\sin x/2} \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x/2$

$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right) = \underline{\frac{2}{\pi}}$.

(1)

原式 $= \int_0^1 \sin\pi x \, dx$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin\pi x \, d\pi x$

$= -\frac{1}{\pi}\cos\pi x \Big|_0^1$

$= \frac{2}{\pi}$

T54

$$\int \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta\cos^3\sqrt{\theta}}}\,d\theta$$

令$\sqrt{\theta}=t$ *令根号为新元.

$d\sqrt{\theta}=dt \rightsquigarrow \frac{d\theta}{2\sqrt{\theta}}=dt \Rightarrow d\theta=2\sqrt{\theta}\,dt=2t\,dt$

$$=\int \frac{\sin t}{t\sqrt{\cos^3 t}}\,2t\,dt$$

$$=\int \frac{2\sin t}{\sqrt{\cos^3 t}}\,dt$$

$$=-2\int \frac{1}{\sqrt{\cos^3 t}}\,d\cos t$$

$$=-2\,\frac{\cos^{-\frac{1}{2}} t}{-\frac{1}{2}}+C$$

$$=4\frac{1}{\sqrt{\cos\sqrt{\theta}}}+C$$

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})\,d\theta$$

令$\theta^{3/2}=t$ *定积分换元要变上下限.

$$\left(\begin{aligned}&\tfrac{3}{2}\theta^{\frac{1}{2}}d\theta=dt\\ \Rightarrow\ &d\theta=\tfrac{2}{3}\theta^{-\frac{1}{2}}dt\\ &\quad=\tfrac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}dt\end{aligned}\right)$$

$$原式=\int_0^{\pi} t^{1/3}(\cos^2 t)\frac{2}{3}t^{-1/3}\,dt$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\cos 2t\,dt=\frac{\pi}{3}$$

T21

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx$$

令 $u=1+\sqrt{x}$. $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{dx}{2(u-1)}$

$\Rightarrow 2(u-1)du=dx$

$$原式=\int\frac{2(u-1)du}{(u-1)\cdot u^2}$$

$$=\int\frac{2}{u^2}du=\frac{2}{-1}u^{-1}+C=-\frac{2}{u}+C$$

$$=-\frac{2}{1+\sqrt{x}}+C$$

T87

$$I=\int_0^a \frac{f(x)\,dx}{f(x)+f(a-x)}$$

令 $u=a-x$ $\quad du=-dx$

$$I=\int_a^0 \frac{-f(a-u)\,du}{f(a-u)+f(u)}$$

$$=\int_0^a \frac{f(a-x)\,dx}{f(a-x)+f(x)}.$$

$$2I=\int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(a-x+f(x)}\,dx$$

$$=\int_0^a 1\,dx=a$$

$$\Rightarrow I=a/2$$

- 不定积分常数C，换元必须换回去。
换元变限定积分，字母使用要注意。
开根要加绝对值，除零讨论别忘记.

- 求极限的一些技巧.

①出现根式有理化(例A) $\xrightarrow[\text{一部分是多项式}]{\text{常出现有}}$ 多项式求极限(例B)

② $\frac{0}{0}$型 $\frac{\infty}{\infty}$型常用因式分解 $\begin{cases} a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}) \\ \text{多项式除法} \end{cases}$

出现三角函数 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \\ \text{各种公式} \end{cases}$

各种公式：

$\left.\begin{array}{l} \sin^2 x=1-\cos^2 x \\ \cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x) \end{array}\right\}$ $\sin x$与$\cos x$互化

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$
$=1-2\sin^2 x$
$=2\cos^2 x-1$

$\csc x=\frac{1}{\sin x}$ $\sec x=\frac{1}{\cos x}$

$\cot x=\frac{1}{\tan x}$

积化和差/和差化积 (例D)

- 关于连续、导数死抠定义就没问题.

△定义：称$f(x)$在$x=c$处连续，若$\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$

△定义：$f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

什么时候算左右导？当 $f(x)$在$x>c$和$x<c$表达式不一样的时候分左右导.

△ $f(x)$可导 则$f(x)$连续.
$f(x)$连续不一定$f(x)$可导.

可导反映图像的光滑性；连续反映连续性.

- $g(x) \le f(x) \le h(x)$. $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = L$ 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

- $f(x) < g(x)$ 则 $\lim f(x) \le \lim g(x)$

- 几个长得很像的函数

① $x\sin x$ 连续又可导，性质好得不了.

② $\frac{1}{x}\sin x$ 在 $x=0$ 处不连续(没定义)，自然不可导(不连续一定不可导)

但有极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\sin x = 1$

③ $x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续(没定义)，不可导.

但有极限(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ （$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$，$\sin\frac{1}{x}$ 有界. 用sandwich

$-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x$ … ）

(b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x} \overset{\text{换元}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0^{\pm}} \frac{\sin t}{t} = 1$

④ $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续.

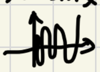
但有极限 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} \overset{\text{换元}}{=\!=} \lim\limits_{t\to 0^{\pm}} t\sin t = 0$

⑤ $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时在 $1, -1$ 间振荡，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

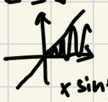
⑥ $x^2\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续.

但有极限 $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$

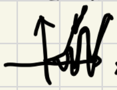
* **Remark** $x\sin\frac{1}{x}$ 与 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 相当于 $\sin\frac{1}{x}$ 振幅被 x，x^2 调制，因此不再振荡



$\sin\frac{1}{x}$



$x\sin\frac{1}{x}$



$x^2\sin\frac{1}{x}$

- 渐近线 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax - b = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax.$$

- 手绘函数图像.

一些注意点：①考虑特殊点 $x=c$ 处函数的行为，即求 $\lim_{x\to c} f(x)=?$

包括 { 分母的零点。$\frac{x^2}{x+1}$ 中 $x=-1$ 是需要考虑的.
　　　$\pm\infty$ 点.

②考虑 增减性、concavity, points of inflections.

这时把关键点处函数值标出.

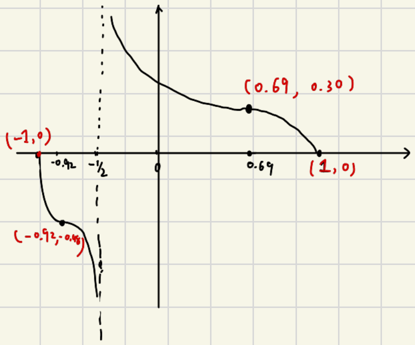
③考虑 渐近行为（$\pm\infty$ 处是否有渐近线）
asymptotes

T32 Graph $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}$

函数定义域是 $[-1,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},1]$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}=-\infty$$

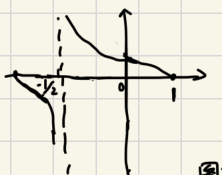
$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}=\infty$$



key points 需要标出来.

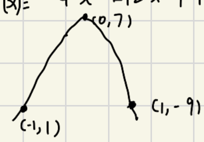
$y'=\frac{-(x+2)}{(2x+1)^2\sqrt{1-x^2}}$（虽然很复杂但注意分母恒正）

$$\begin{cases} y'(x)>0, & x<-2 \\ y'(x)<0, & x>-2 \checkmark \end{cases}$$



图像I
(画在草稿纸上)

Remark：$g(x)=-4x^3-12x^2+7=0$ 的根.



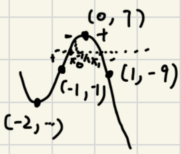
在 $(-1,0)$ 间有一根
在 $(0,1)$ 间有一根.
求解的一个办法是二分法，当然也很难算……

$y''=\frac{-4x^3-12x^2+7}{(2x+1)^3(1-x^2)^{3/2}}$，其中 $(1-x^2)^{3/2}$ 恒正.

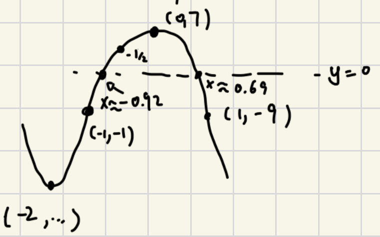
$$\begin{cases} (2x+1)^3>0, & x>-\frac{1}{2} \\ (2x+1)^3<0 & x<-\frac{1}{2} \end{cases}$$

-1到0的中点是 $-\frac{1}{2}$. $g(-\frac{1}{2})=4.5>0$. 因此解在 $(-1,-\frac{1}{2})$
-1到 $-\frac{1}{2}$ 的中点是 -0.75. $g(-0.75)=1.9375>0$. 因此解在 $(-1, 1.9375)$
-1到 -0.75 - · · · -0.875. $g(-0.875)=0.492>0$. · · · $(-1,-0.875)$
-1到 -0.875 · · · · -0.9375. $g(-0.9375)=-0.25<0$ · · · · $(-0.9375,-0.875)$.
-0.9375到 -0.875 · · · -0.906. $g(-0.906)=0.1247>0$ · · · · $(-0.9375,-0.906)$
- - · - - - · · · -0.92175. $g(-0.92175)=-0.0629<0$ · · · $(-0.92175,-0.906)$
· - - - - -0.913875. $g(-0.91375)=0.0309447>0$ · · · $(-0.92175,-0.91375)$.

这个区间内精确到第2位小数，只有0.92.



$-4x^3-12x^2+7$ 的图像：



求 0.69 同理.

其实一点也不复杂对吧？

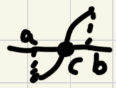
看出所有零点，按顺序写好.

	$(-1,-0.92)$	$(-0.92,-\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2},0.69)$	$(0.69,1)$
y''	+	-	+	-

用 y'' 的正负性对图像I进行修正.

- 区分几个比较相近的定理.

△ f在$[a,b]$上连续.

$f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists c\in(a,b)$ s.t. $f(c)=0$ 图像 

△ f在$[a,b]$上连续、可导.

若$f(a)=f(b)$ 则存在 $c\in(a,b)$ s.t. $f'(c)=0$

- 求导公式(也是积分公式)

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ $\quad \int \sin x\,dx = -\cos x$

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ $\quad \int \cos x\,dx = \sin x$

* $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$ $\quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$ $\quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

- $\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x).$

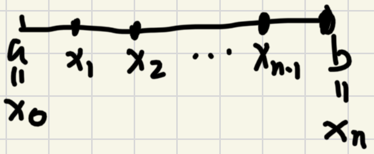
黎曼和

参考《数学分析》常庚哲 史济怀 6.1节. (不考)

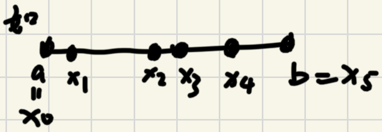
- 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有定义.

Def: $[a,b]$ 上的一个分割是指一个序列 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, $n\in\mathbb{N}^*$, 满足 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 记作 π.

* 图像上看就是把区间 $[a,b]$ 分成 n 份. 注意可以不等分.



如

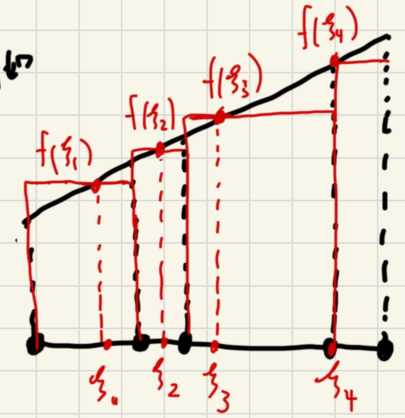


Def: 设 f 是在 $[a,b]$ 上有定义的函数, 且 $[a,b]$ 上有一个分割 π.
在分割的第 i 个小区间 $[x_i, x_{i-1}]$ 上任取一点. $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$.

和式 $\sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 称为黎曼和.

$\sum$: 加和
$f(\xi_i)$: 每个区间任取一点的函数值
$(x_i - x_{i-1})$: 每小区间的长度

*例如



* 课堂所学的三种和:

① 分割取等分, 取点取小区间左端点.
② 分割取等分, 取点取小区间右端点.
③ 分割取等分, 取点取小区间中点

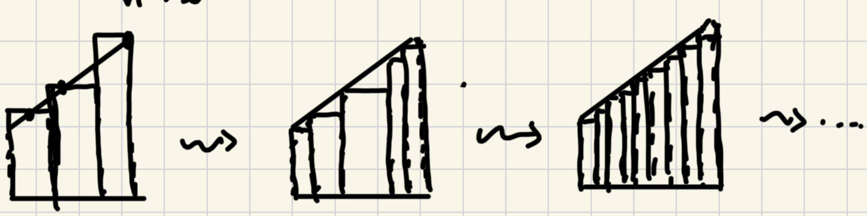
都是黎曼和的一种.

* 简言之, $\boxed{\text{分割} + \text{取点} \overset{\text{作和}}{=\!=} \text{黎曼和}}$

分割: 无穷种选择 课堂取等分
取点: 无穷种选择 课堂取小区间左或右或中点.

现在我们要对黎曼和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 取极限.

Question: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 是对分割的份数取极限.



好像可以!
但是让分割份数变大并不一定能让黎曼和很好地逼近面积.

关键在于分割不一定是等分的.

(总是让第一个区间长度固定, 剩下区间越分越细.

所以我们的极限应该是让分割越来越"细", 而不是分割份数越来越多.
于是有下面定义

Def: $\max\{x_i - x_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n\}$, 记作 $\|\pi\|$, 称为分割的宽度.

* 即分割中区间的最大长度.

如果 $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 这个极限存在, 这个极限值就定义成

黎曼积分的值, 简称积分值.

* 特地强调黎曼积分说明有别的积分. 黎曼积分要求 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义, 那么 $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ 中 $\frac{1}{x}$ 在 $[0,1]$ 上并不都有定义, 故不是黎曼积分.
而 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ 这种不在闭区间上的积分也不算黎曼积分. $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ 与 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ 都是反常积分, 之后会学习如何积反常积分.

我们把 $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ 转化成 ε-δ 语言, 陈述如下:

Def: f 在 $[a,b]$ 上有定义.
对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得任意分割 π 满足 $\|\pi\| < \delta$

有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I\right| < \varepsilon$. 则 I 称为 f 在 $[a,b]$ 上的积分值, 记作 $I = \int_a^b f(x)dx$.

*分割变细, 取点自然要重新取点.

* 注意，用黎曼和定义积分，与分割无关，与怎样在小区间取点无关.

* 从这个定义来看，用课堂所学的分割方式来证积分存在性是不严格的.
因为必须对所有黎曼和(任意分割、任意取点)，只要分割够细就有和积分值任意近.

$$\boxed{*\text{分割}+\text{取点} \xrightarrow{\text{作和}} \text{黎曼和}}$$

但课堂只对等分分割这一种分割，取左、右、中三种取点来验证分割够细有和与积分值任意接近. 显然是不够的.

* 如果没看明白上一点也没有关系，因为我们要区分两种问题

Q ① 证明积分存在性问题(即证一个函数可积)

Q ② 求积分.

对于Q①，以现有知识我们无法证明(参见上一个*的讨论). 但是考试不会让大家证明一个积分是否存在!

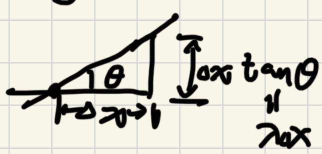
对于Q②，让我们求积分，说明已知积分存在. 这时，由于积分存在，所以对任何分割、任何取点的黎曼和，分割变细下收敛到的极限值都相同. 所以我们可以用特殊的分割特殊的取点去算这个与分割、取点无关的量.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}+a\right)\frac{1}{n}$. 如果你够厉害完全可以用另一个很复杂的分割，很复杂的取点算极限，反正答案是一样的.
这是我们课堂只讲 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}+a\right)\frac{1}{n}$ 就是积分值的原因，因为从实用计算的角度而言，它已经够了.

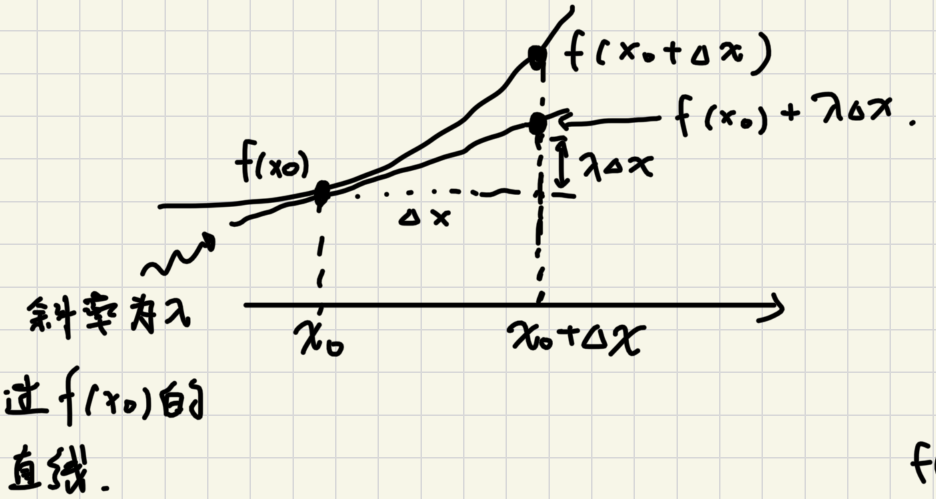
关于字母d的含义、可微

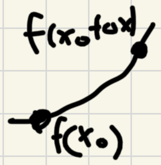
参考《数学分析》常庚哲 史济怀 4.1节.
(不考)

*斜率的几何意义.



斜率 = λ = tanθ.



函数f(x)在x_0附近函数图像是  这样的，它是弯弯的。

图像是弯的我们俗称非线性，图像是直的俗称线性。
像这种非线性的图像很复杂，能不能把弯弯的图像看成是直的呢？即，这样的函数有没有线性的近似？
可以有线性近似的函数称为<u>可微的</u>.

Def：设函数f在(a,b)上有定义，且$x_0 \in (a,b)$. 若存在常数λ
使得 $$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \lambda\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$
则称f是可微的.

* $f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \lambda\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$ 是什么意思呢

‖

⇓

△ Def of $o(f(x))$:

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ 则记 $g(x)=o(f(x))$，读作$g(x)$是$f(x)$的一个无穷小．$o(f(x))$读作$f(x)$的一个无穷小量.

所以 $o(\Delta x)$ 代表一个函数，函数 $o(\Delta x)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0$.

△ 数学总是严格的，但现实生活不是．
比如 e^{-x} 衰减很快，数学家会说 e^{-x} 永远不等于0.
但是其余人会给一个截断：比如低于e^{-1}我就认为是0

≈ 0.
因为信号太弱仪器也检测不到．
所以粗略地说，$o(\Delta x)$ 就看成是0.

△ 把 $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\lambda\Delta x+o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$ 移项

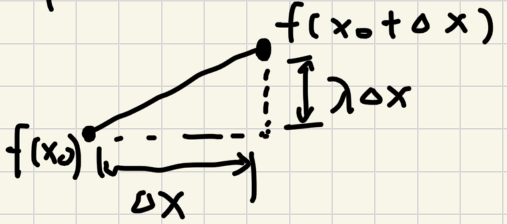
$$f(x_0+\Delta x)-(f(x_0)-\lambda\Delta x)=o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)\ \overset{看成是}{=}\ 0$$

（这个等号并不严格成立！但是看成0可以简化理解）.

在把 $o(\Delta x)$ 看成0的情况下

$f(x_0+\Delta x)-(f(x_0)+\lambda\Delta x)=0$ （$\Delta x\to 0$时都成立）

即 $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\lambda\Delta x$ （$\Delta x\to 0$时都成立）



Δx无论什么值都成立，说明f在“$o(\Delta x)$视为0”时，是一条直线！

这就是可微的含义．函数有局部的线性近似 ⇔ 函数可微.

Def：线性项 $\lambda\Delta x$ 称为函数在 $x=x_0$ 处的微分，记作 $df(x_0)$.

* $df(x_0)$ 只出现 x_0，但实际上 $df(x_0)=\lambda\Delta x$ 是关于 Δx 的线性函数.

一个著名的论段：可微必可导

$f(x)$ 在 x_0 处可微则存在常数 λ 使得

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\lambda\Delta x+o(\Delta x) \quad (\Delta x\to 0)$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lambda+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}. \quad (\Delta x\to 0)$$

两边取 $\Delta x\to 0$ 极限

$$\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{=f'(x_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\lambda+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=\lambda+0=\lambda$$

故 $f'(x_0)=\lambda$ 存在

当函数可微，可微表达式中的常数 λ 只能是 $f'(x_0)$.

$$df(x_0)\overset{\text{定义}}{=\!=}\lambda\Delta x=f'(x_0)\Delta x.$$

* 是不是很想把 Δx 变成 dx 然后把 dx 除掉变成 $\frac{df(x_0)}{dx}=f'(x_0)$ 这个常见的形式呢？注意 Δx 是一个变量，它趋于 0，dx 是 x 这个关于 x 的函数的微分. 我们要用定义证明二者相同.

令 $g(x)=x$. $\quad \underbrace{dg(x_0)}_{=dx_0}=g'(x_0)\Delta x=1\cdot\Delta x$ 对 $\forall x_0\in(a,b)$ 都成立.

故 $dx=\Delta x$. , $\forall x\in(a,b)$.

$\Downarrow$ 把 Δx 换成 dx

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

* $d\big(f(x)g(x)\big) = \big(df(x)\big)\,g(x) + f(x)\,dg(x).$ ← 证分部积分有用.

证明

$$d\big(f(x)g(x)\big) = \big(f(x)g(x)\big)' = \left[f'(x)\cdot g(x) + f(x)g'(x)\right]dx$$
$$= f'(x)\cdot g(x)\,dx + f(x)g'(x)\,dx$$
$$= g(x)\,df(x) + f(x)\,dg(x).$$

* 积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 中的 dx 是 x 的微分吗?

从定义中看，$\int_a^b f(x)\,dx$ 只是一个记号. 但实际上积分中的"dx"具有和微分 dx 完全一样的性质，从应用角度看，可以看成微分

不知道是否有别的定义. 但《数分》中定义的 $\int_a^b f(x)dx$ 是个整体记号.

这就像物理中 $\boxed{\text{惯性质量} = \text{引力质量}}$ 一样

虽然定义上看不是同一个东西，但是做计算时却可视作相等.

* 当我们把积分中的 dx 视作微分.

记住 $\boxed{df(x) = f'(x)\,dx}$

因此有 $\int_a^b \underline{f'(x)\,dx} = \int_a^b \underline{df(x)}.$

这种积分技巧很常见，就是把"xxx"拿到 d 里面去这一口语表达的含义.

* 关于各种符号.

对 $df(x) = f'(x)\,dx$ 两边同除以 dx.

有 $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x)$. 因此，$\dfrac{df(x)}{dx}$ 是导数的第二种记号.

由于导数可以表示成微分的商，导数又叫作微商.

* $\frac{df(x)}{dx}$ 是整体的一个记号. $\frac{df(x)}{dg(x)}$ 是什么?

$\frac{df(x)}{dg(x)}$ 不是 $f(x)$ 对 $g(x)$ 求导，而是 $df(x)$ 这个微分除以 $dg(x)$ 这个微分. 如果你自己链式法则这么写:

$$\frac{df(x^2-1)}{dx} = \frac{df(x^2-1)}{d(x^2-1)} \cdot \frac{d(x^2-1)}{dx}$$

会有疑问.

表示 $f(x^2-1)$ 关于 x 求导

它是等号为什么成立?

$df(x^2-1)$ 除以 $d(x^2-1)$ ← 不是导数

$d(x^2-1)$ 除以 dx. ← 不是导数 ← 没运用链法则

链式法则 $\left.\frac{dF(g(x))}{dx}\right|_{x=x_0} = F'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

导数 导数

但是除了高数，任何别的课这么写没问题.

因为从实用角度，结果并没有问题

(不过如果王老师说可以用那就可以用……)

费曼：

我觉得“sin θ”很像s乘i乘n乘θ！因此我另外发明了一套符号。我的符号跟平方根有点类似，正弦用的是希腊字母∑最上的一笔拉出来，像伸出一条长手臂般，f就放在手臂之下。正切用的是T，顶端的一笔往右延伸。至于余弦，我用的是Γ，但这符号的坏处是看起来很像平方根的符号。

那么，反正弦的符号便可以用同样的∑，不过左右像照镜子般颠倒过来，换句话说，长手臂现在伸向左边，函数f放在下面。这才是反正弦呀！我觉得教科书把反正弦写成sin-1θ的方式简直是发神经！对我来说，那是1除以sin θ的意思；我的符号强多了。

我很不喜欢f（x），那看起来太像f乘以x了。我更讨厌微分的写法：dy/dx，这令人很想把符号中的两个d互消掉，为此我又发明了一个像“＆”的符号。对数（logarithm）比较简单：一个大写L下面的一笔往右延伸，函数放在手臂上便成了。

最后再提一点，注意符号规范。虽然高数没有数分那么严谨，但是该有的规范还是希望大家遵守！

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(s) = 0 \quad !}$$

可能手一抖写成s了。

什么时候字母可以变？把一道题里所有出现的x换成s，则意义不变。比如

例1.

$$\boxed{f(x)}$$

← 只有一个x，换成s

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(s)}$$

含义不变。

例2.

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} f(s)}$$

✓

例3

$$\boxed{F(s) = \int_{h(s)}^{g(s)} f(x)\,dx}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(m) = \int_{h(m)}^{g(m)} f(t)\,dt}$$

✓

如果只换了部分，就一定会出问题!!! . .

比如 $\frac{df(x)}{ds}=0$ ，$\int f(t)dx$ …… ……

△变量字母 $a, b, c, x, y, z, \gamma, \beta, \alpha$ …… 非常多，如果题目已经把 f 作为函数名，千万不要 因为字母不够用，把 f 取成变量名.

△换元也类似，比如令 $t=x^2-1$ ，则所有出现 x 的地方都要用 t 表示.