Week 5 习题课

- 在 4.4节中，我们需要解决的问题是手绘函数图像。因此我们需要去研究函数的性质，并在绘图中体现出来。

函数绘图注意点：
- 增减性
- concavity & inflection points.
- asymptotes
- key points.

- 我们可以问一个函数是否连续，是否可导. $f, f', f''\ldots$ 都是函数，因此都可能不连续或不可导。

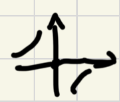
- 关于导数的复习.

△左导 $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

△右导 $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

当函数连续

- 左导 = 右导 = 有限值　导数存在(有限值)，切线存在且斜率是导数值
- 左导 = 右导 = $+\infty$ 或 左导 = 右导 = $-\infty$　导数不存在，但切线存在，是竖直的切线



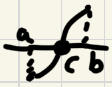
- 左导 = $+\infty$，右导 = $-\infty$　导数不存在，切线不存在
- 左导 = $-\infty$，右导 = $+\infty$　导数不存在，切线不存在.
- 左导等于某有限值a，右导等于某有限值b，$a\neq b$，导数不存在，切线不存在.

* 如果 $\lim\limits_{h\to c}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 可以直接算，就没必要分左右导讨论.

- 区分几个比较相近的定理.

△ f在 $[a,b]$上连续.

$f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists c\in(a,b)$ s.t. $f(c)=0$ 图像



△ f在 $[a,b]$上连续、可导.

若 $f(a)=f(b)$ 则存在 $c\in(a,b)$ s.t. $f'(c)=0$

T10

令 $F(x)=f(x)-g(x)$.

设 f在 $x=x_1$ 处取到最大值,

g在 $x=x_2$ 处取到最大值.

1) 若 $x_1\neq x_2$. 不妨设 $x_1<x_2$

$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)>0$

$F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)<0$.

则存在 $x_3\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$

使得 $F(x_3)=f(x_3)-g(x_3)=0$

$F(a)=f(a)-g(a)=0$

$F(b)=f(b)-g(b)=0$.

$F(a)=F(x_3)$, 故存在 $x_4\in(a,x_3)$

使得 $F'(x_4)=0$

$F(b)=F(x_3)$, 故存在 $x_5\in(x_3,b)$

使得 $F'(x_5)=0$.

由 $F'(x_4)=F'(x_5)$, 可知 存在 $c\in(x_4,x_5)$

使得 $F''(c)=f''(c)-g''(c)=0$

2) 若 $x_1=x_2=t$

$F(t)=f(t)-g(t)=0$

在 1) 中令 $x_3=t$, 则 同理可证

存在 $c\in(a,b)$, 使得 $F''(c)=f''(c)-g''(c)=0$.

- concavity : 对一阶导存在的函数的研究. (一阶导不存在就不用管)

concavity 的定义: I是一个 open interval. f是I上的有一阶导的函数

$$\begin{cases} \text{concavity up} & f'(x)\text{在 I 上递增.} \\ \text{concavity down} & f'(x)\text{在 I 上递减.} \end{cases}$$

可用 f'' 正负来判断

- point of inflection.

△定义：函数图像上一点 $(c, f(c))$ 是一个 point of inflection，

若 ① 函数在该点有切线

② 该点是 concavity 变换的点（up 变 down 或者 down 变 up）.

* concavity up $\cup$ concavity down $\cap$

△ point of inflection 的性质：

若 $(c, f(c))$ 是 point of inflection，则 $f''(c)$ 只有两种情况

$$\begin{cases} f''(c) \text{ 不存在} \\ f''(c) \text{ 存在且等于 } 0 \text{（} f''(c) \text{ 只要存在就是 } 0\text{）.} \end{cases}$$

课本关于这个性质的阐释（复习导数、介值定理）.

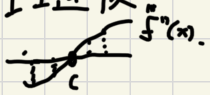
$(c, f(c))$ 是 point of inflection，因此
$$\begin{cases} \text{condition I：函数在 } (c, f(c)) \text{ 处有切线（tangent line）} \\ \text{condition II：} x=c \text{ 是 concavity 转变点.} \end{cases}$$

对 condition I 的分析：

$$\text{函数在 } (c, f(c)) \text{ 有切线} \xrightarrow{\text{说明}} \begin{cases} f'(c) \text{ 存在（有限）} & ① \\ \text{导数无穷大.} & ② \end{cases}$$

① 若一阶导 $f'(c)$ 存在. 对于 $f''(x)$ 的连续性分类讨论.

若 $f''(x)$ 在 I 上连续，由 cond II，我们可知任何含 c 的 interval，端点处 $f''(x)$ 的取值都异号.



考虑区间 $[c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}]$. $f''(c-\frac{1}{n}) \cdot f''(c+\frac{1}{n}) < 0$，

故存在 $x_\varepsilon \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 使得 $f''(x_\varepsilon)=0$. $x_\varepsilon \in \bigcap_{n\in N^*} [c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}]$.

而 $\bigcap_{n\in N^*} [c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}] = \{c\}$. 故 $x_\varepsilon = c$，即 $f''(c)=0$.

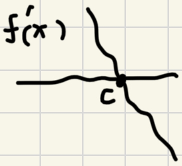
若 $f''(x)$ 在 I 上不连续，需要 advanced 的知识，略.（而且我也不会 ☺）

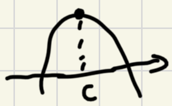
② 若一阶导无穷大则二阶导 $f''(c)$ 不存在.

△ point of inflection 的判断：去 check 定义的 cond I 和 cond II 即可. 注意 cond II $x=c$ 是 concavity 转变点不代表 $f''(c)=0$ (Exp $y=x^4$)，也不代表 $f'(c)$ 或 $f''(c)$ 存在 (Exp $y=x^{1/3}$). 换言之，cond II 条件是和除 c 点外周边的点的性质有关，$f''(x)$ 在 x 比 c 小和比 c 大异号.
("c 的周边但不含 c" 这个区域上函数二阶导的性质).

● 用二阶导判断 local min 和 local max.

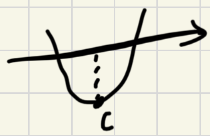
△ 判断法则 (不要硬记书上的法则, 画图判断就行).

$f'(c)=0$, $\underbrace{f''(c)<0}_{f'(x)\text{递减}}$ $\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 

local max

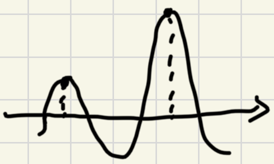
$f'(c)=0$, $\underbrace{f''(c)>0}_{f'(x)\text{递增}}$ $\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ 

local min.

$f'(c)=0$, $f''(c)=0$ $\Rightarrow$ Everything is possible.

* local min 或 local max 都不一定是整个区间上的 max 或 min.



- 手绘函数图像.

一些注意点：①考虑 特殊点 $x=c$ 处函数的行为，即求 $\lim_{x\to c} f(x)=?$

包括 { 分母的零点。$\frac{x^2}{x+1}$ 中 $x=-1$ 是需要考虑的.
　　　{ $\pm\infty$ 点.

②考虑 增减性、concavity，points of inflections.

这时把关键点处函数值标出.

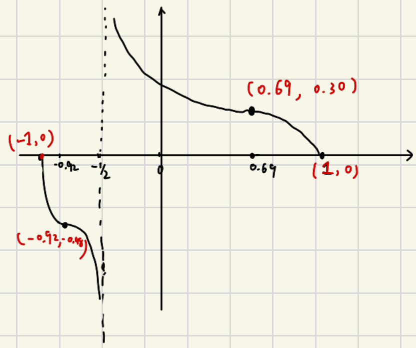
③考虑 渐近行为（$\pm\infty$ 处 是否有渐近线）
asymptotes

T32 Graph $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}$

函数定义域是 $[-1,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},1]$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}=-\infty$$

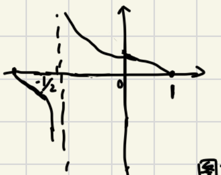
$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}=\infty$$



key points 需要标出来.

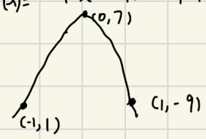
$y'=\frac{-(x+2)}{(2x+1)^2\sqrt{1-x^2}}$（虽然很复杂但注意分母恒正）

$\begin{cases} y'(x)>0, & x<-2 \\ y'(x)<0, & x>-2 \ ✓ \end{cases}$



图像I
(画在草稿纸上)

Remark：$g(x)=-4x^3-12x^2+7=0$ 的根.



在 $(-1,0)$ 间有一根

在 $(0,1)$ 间有一根.

精确的一个办法是二分法，当然也很难算……

$y''=\frac{-4x^3-12x^2+7}{(2x+1)^3(1-x^2)^{3/2}}$，其中 $(1-x^2)^{3/2}$ 恒正.

$\begin{cases} (2x+1)^3>0, & x>-\frac{1}{2} \\ (2x+1)^3<0 & x<-\frac{1}{2} \end{cases}$

-1到0的中点是 $-\frac{1}{2}$. $g(-\frac{1}{2})=4.5>0$. 因此解在 $(-1,-\frac{1}{2})$

-1到 $-\frac{1}{2}$ 的中点是 -0.75. $g(-0.75)=1.9375>0$. 因此解在 $(-1, 1.9375)$

-1到 -0.75 …… -0.875. $g(-0.875)=0.492>0$. …… $(-1,-0.875)$

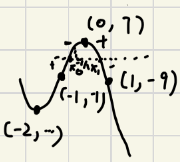
-1到 -0.875 …… -0.9375. $g(-0.9375)=-0.25<0$ …… $(-0.9375,-0.875)$.

-0.9375到 -0.875 …… -0.906. $g(-0.906)=0.1247>0$ …… $(-0.9375,-0.906)$

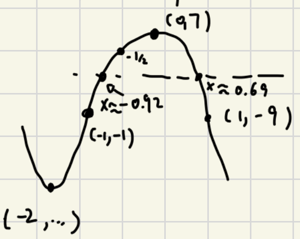
…… -0.92175. $g(-0.92175)=-0.0629<0$ …… $(-0.92175,-0.906)$

…… -0.913875. $g(-0.91375)=0.0309447>0$ …… $(-0.92175,-0.91375)$.

这个区间内精确到第2位小数，只有0.92.



$-4x^3-12x^2+7$ 的图像：



求0.69同理.

其实一点也不复杂对吧？

看出所有零点，按顺序写好.

	$(-1,-0.92)$	$(-0.92,-\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2},0.69)$	$(0.69,1)$
y''	+	-	+	-

用 y'' 的正负性对图像I进行修正.

T42. $y=\sqrt[3]{x^3+1}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x^3+1}=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3+1}=-\infty$

$y'=\dfrac{x^2}{(x^3+1)^{4/3}}>0.$

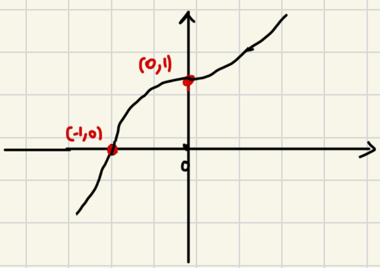
图像II
(画在草稿纸上)

$y''=\dfrac{2x}{(x^3+1)^{5/3}}$

看出所有零点，按顺序写好.

y''	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
	$+$	$-$	$+$

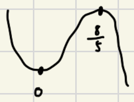
用y''的正负号对图像II修正，并标上关键点.



T55.

$y' = (8x - 5x^2)(4-x)^2$

y'	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{8}{5})$	$(\frac{8}{5}, +\infty)$
	$-$	$+$	$-$

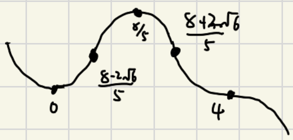


图像V

$y'' = 4(4-x)(5x^2 - 16x + 8)$

y''	$(-\infty, \frac{8-2\sqrt{6}}{5})$	$(\frac{8-2\sqrt{6}}{5}, \frac{8+2\sqrt{6}}{5})$	$(\frac{8+2\sqrt{6}}{5}, 4)$	$(4, +\infty)$
	$+$	$-$	$+$	$-$

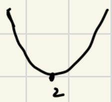
2.图像V修正.



注意不能画出x轴.

T101

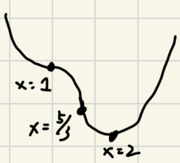
y'	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
	$-$	$+$



图像VI.

$y'' = 2(x-1)(x-2) + (x-1)^2 = (x-1)(x - \frac{5}{3})$

y''	$(-\infty, 1)$	$(1, \frac{5}{3})$	$(\frac{5}{3}, +\infty)$
	$+$	$-$	$+$



$x=2$: local min

no local max

$(-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$: concave up

$(1, \frac{5}{3})$ concave down

$x=1$, $x=\frac{5}{3}$: inflection pts.

T110

$y'' = x^2 (x-2)^3 (x+3)$.

y''	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, +\infty)$
	$+$	$-$	$+$

注意$x=0$不是concavity转变点.

$x=-3$ 与 $x=2$ 是 points of inflection.

T17

$f(t)=\frac{1}{2}+\sin\pi t$ on $[0,2]$,

分割为4个子区间 $[0,0.5]$, $[0.5,1]$, $[1,1.5]$, $[1.5,2]$. 子区间中点分别是 $m_1=0.25$, $m_2=0.75$, $m_3=1.25$ $m_4=1.75$.

$f(m_1)=1$, $f(m_2)=1$, $f(m_3)=1$

$f(m_4)=1$.

总面积 $\approx (1+1+1+1)\times\frac{1}{2}=2$.

$$\text{平均值}=\frac{\text{总面积}}{\text{区间长度}}=\frac{2}{2}=1$$

记得要除以区间长度!

T 15

$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)$, 对任意x成立.

若 $f\equiv 0$, 则 $f'(x)\equiv 0$,

故 $f'(x)=f'(0)f(x)$.

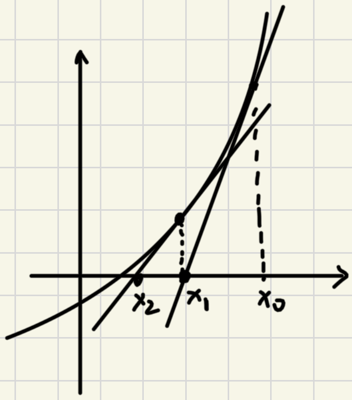
若f不恒为0, 则 $f(0)=1$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)\cdot f(0)}{h}$$

$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)$$

- **Newton's Method.**



$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

令 $y=0 \Rightarrow$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

要求 $f'(x_n) \neq 0$.

$\boxed{例}$

T21 求 $x^2(x+1) - \frac{1}{x} = 0$ 的根.

令 $f(x) = x^3 + x^2 - \frac{1}{x}$. 则 $f'(x) = 3x^2 + 2x + \frac{1}{x^2}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n^2 - \frac{1}{x_n}}{3x_n^2 + 2x_n + \frac{1}{x_n^2}}$$

$x_1 = 0.83333$, $x_2 = 0.81924$,

$x_3 = 0.81917$, $x_4 = 0.819173$

$x_5 = 0.819173$ 前5位稳定.

故解的前5位是0.81917.

保留4位是0.8192.