·Week 2 习题课讲稿.

- 不要出现 $\frac{1}{0}$ 这种写法，数字0不能当分母的，有些事情心里知道就好，不必说出来.

- 在 week 1 中，我们练习了怎么算一个极限值. 在本周学习中，极限的情况变得更加复杂. 让我们看看极限都有哪些情况吧.

$$\lim_{\substack{x\to\pm\infty \\ x\to c}} f(x)=\begin{cases}\text{不存在(振荡, 发散到}\pm\infty) \\ \\ \text{存在(是个常数)}\end{cases}$$

* $\pm\infty$ 叫极限存在吗？
不存在，称作 极限发散.

- 几个长得很像的函数

① $x\sin x$ 连续又可导，性质好得不了.

② $\frac{1}{x}\sin x$ 在 $x=0$ 处不连续(没定义)，自然不可导(不连续一定不可导)
但有极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin x=1$

③ $x\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续(没定义)，不可导.
但有极限 (a) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ （$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，$\sin\frac{1}{x}$ 有界，用 sandwich
$-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$ … ）

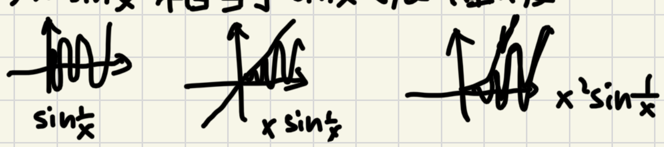
(b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{1}{x}\overset{\text{换元}}{=\!=}\lim\limits_{t\to 0^{\pm}}\frac{\sin t}{t}=1$

④ $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续.
但有极限 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\overset{\text{换元}}{=\!=}\lim\limits_{t\to 0^{\pm}}t\sin t=0$

⑤ $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时在 1, -1 间振荡，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在

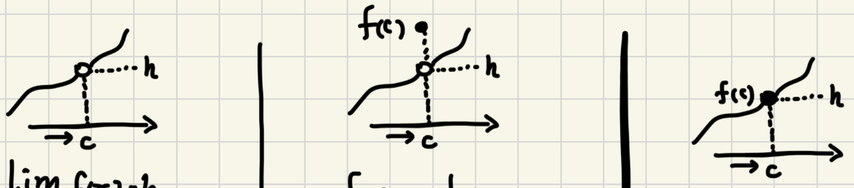
⑥ $x^2\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处不连续.
但有极限 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

* **Remark** $x\sin\frac{1}{x}$ 与 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 相当于 $\sin\frac{1}{x}$ 振幅被 x, x^2 调制，因此不再振荡



连续性

△定义：称 $f(x)$ 在 $x=c$ 处连续，若 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$



$\lim\limits_{x\to c} f(x)=h$. | $f(c)\neq h$ 函数不连续 | $f(c)=h$ 函数连续

△若 $f(x)$ 在 $x=c$ 处连续，g 在 $f(c)$ 处连续，则 gf 在 $x=c$ 处连续.

T64 f 与 g 都在 $x=0$ 处连续，但 gf 在 $x=0$ 处不连续和 Thm 9 矛盾吗？

不矛盾. Thm 9：f 在 $x=c$ 连续，
g 在 $f(c)$ 连续则 $g\circ f$ 在 $x=c$ 连续.

此例中 g 并不在 $x=f(0)$ 处连续，虽然 g 在 $x=0$ 处连续.

$f(x)=x+1$

$$g(t)=\begin{cases}0 & t=1\\ 1 & t\neq 1\end{cases}$$

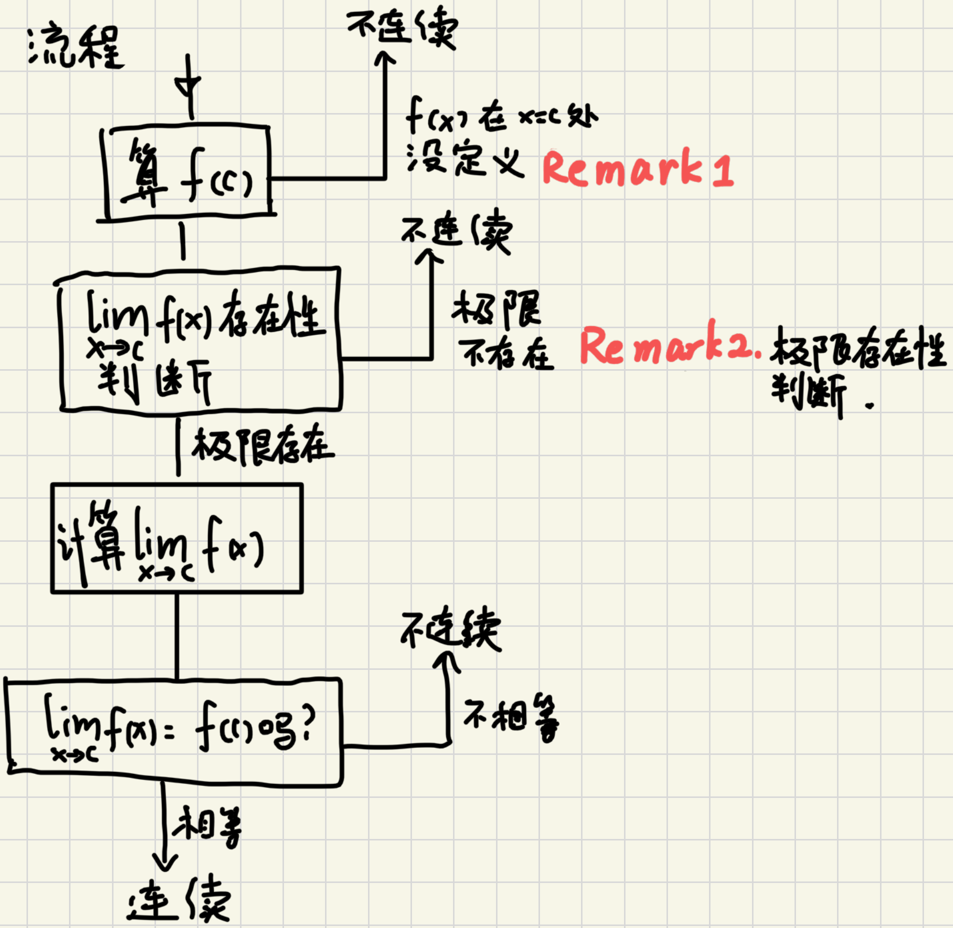
$$g\circ f(x)=g(x+1)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq 0\end{cases}$$

△ $\begin{cases}\lim\limits_{x\to c} f(x)=b\\ g(x)\text{ 在 } b \text{ 处连续}\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} gf(x)=g\left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)=g(b)$

△ 连续是逐点定义的，没有明说默认在定义域内连续.

△常见问题：$f(x)$ 在点 x 处是否连续？

办法就是检验 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ 是否成立.



Remark 1

例如 $f(x)=\frac{1}{x}$

$x=0$ 就不在定义域内，因此没有讨论"$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续吗"的意义.

Remark 2 极限存在性判断

说明极限不存在 $\begin{cases}\text{证发散} \\ \text{左极限}\neq\text{右极限}\end{cases}$

证极限存在 $\begin{cases}\text{一眼看上去可以求极限，暴算即可} \\ \text{证左极限}=\text{右极限}\end{cases}$

* 什么时候要分左、右去算？分段函数连接点要分左右，其余情况只要能算出来没必要分左、右.

• 导数

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

* 这里h有正有负.

* 仔细讲一下 $\lim\limits_{h\to 0}$ $\lim\limits_{h\to 0^+}$ $\lim\limits_{h\to 0^-}$ 这三个符号的含义

让c变动,成为变元x,则得导函数$f'(x)$

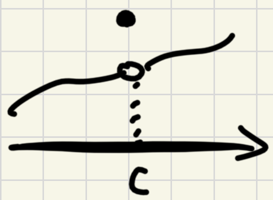
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

△ 导数也是逐点定义,不能默认定义域全可导

△ 证某点可导最好用的办法是 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在

而不是 $\lim\limits_{x\to c}f'(x)$ 存在.

如: $f(x)$



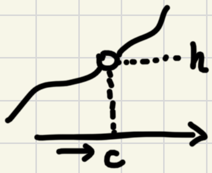
*区分什么是数,什么是函数.
数没有极限(常值函数有极限),但函数有极限.

导数$f'(x)$是一个函数,不是数,因此可以求极限.

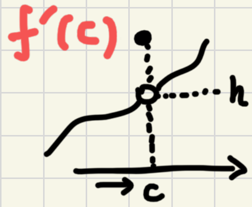
导函数$f'(x)$求极限 $\lim\limits_{x\to c}f'(x)$

同样,关于函数的连续性判断,都适用于$f'(x)$这个特殊的函数.

称 $f'(x)$ 在 $x=c$ 处连续，若 $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = f'(c)$

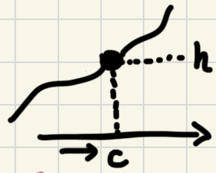


$\lim\limits_{x\to c} f'(x)=h$



$f'(c)\neq h$

函数 $f'(x)$ 不连续



$f'(c)=h$

函数 $f'(x)$ 连续

结论：如果 $f'(x)$ 不连续，不能靠求 $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$ 来求 $f(x)$ 在 $x=c$ 处的导数值 $f'(c)$，因为这时 $f'(c)\neq\lim\limits_{x\to c} f'(x)$

* 左导=右导则导数存在.

左导是 $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 而不是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$

这次作业里不出现它.

△可导必连续

f(x)可导，则f(x)连续（不是f'(x)连续）

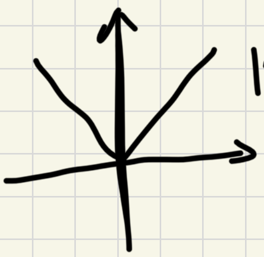
f'(x)可导（二阶导存在），则f'(x)连续.

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = \lim_{h\to 0} f(c) + \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot h.$$

$$= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot h.$$

$$= f(c) + f'(c)\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} h}_{=0} = f(c)$$

△连续不一定可导



|x|

在x=0连续但

在x=0不可导.

例

3.2 T42

$$g(x)=\begin{cases} x^{2/3}, & x\geq 0 \\ x^{1/3}, & x<0 \end{cases}$$

判断 $g(x)$ 在原点处是否可导.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^{2/3}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}h^{-1/3}=\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^{1/3}}{h}=h^{-2/3}=\infty$$

因此导数不存在.

(因为 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$ 不好算，所以要分 $h\to 0^+$ 和 $h\to 0^-$ 去算)

3.1 T35

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

这个极限是 week 1 作业题证过的.

3.1 T48

$y=\sqrt{|4-x|}$ 哪里有 vertical tangents?

$x>4$, $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-4}}$, 不可能出现斜率为 $\pm\infty$.

$x<4$, $y'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$, 不可能出现斜率为 $\pm\infty$.

唯一可能出现斜率 $\pm\infty$ 是在 $x=4$.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{4+h-4}-0}{h}=+\infty$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

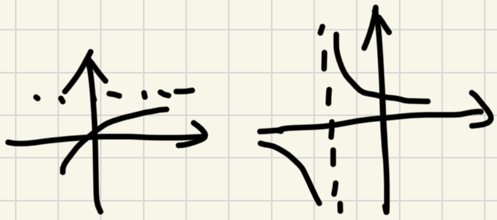
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{4-(4+h)}-0}{h}=-\infty$$

• 找渐近线

①horizontal $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=?$，则 $y=?$ 是 horizontal asymptotes

②vertical $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=\pm\infty$，则 $x=?$ 是 vertical asymptotes

其中 ? 是需要我们求的.



③远处的线性项.

$\boxed{\text{例}}$

画 $y=\frac{x^2-1}{2x+4}$ 的图像 分析可能有问题的点

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-x^{-1}}{2+4x^{-1}}=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{2x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-x^{-1}}{2+4x^{-1}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2-1}{2x+4}$$

令 $t=x+2$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{(t-2)^2-1}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t^2-4t+3}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2}-2+\frac{3}{2t}$$

$$=\infty$$

同理 $\lim\limits_{x\to-2^-}y(x)=-\infty$

$$a_\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{(2x+4)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^{-2}}{2+4x^{-1}}=\frac{1}{2}$$

$$a_{-\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{(2x+4)x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^{-2}}{2+4x^{-1}}=\frac{1}{2}$$

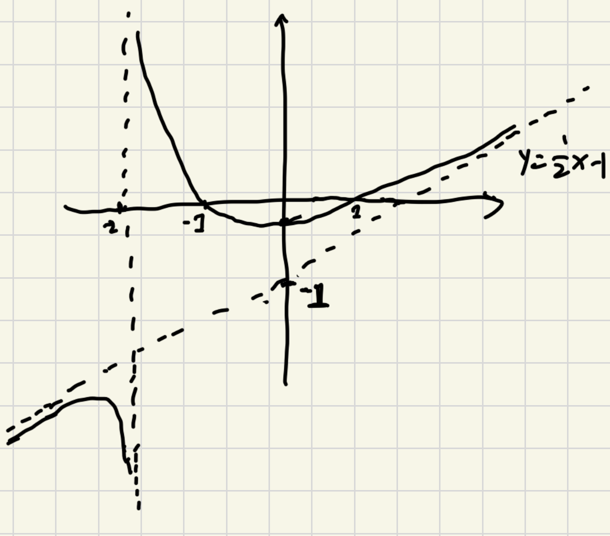
$$b_\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x+4}-\frac{1}{2}x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-\frac{1}{2}x(2x+4)}{2x+4}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^{-1}-2}{2+4x^{-1}}$$

$$=-1$$

同理 $b_{-\infty}=-1$



·介值定理： f在某个区间[a, b]上连续，则f一定能取到 f(a)到 f(b)间任何值（若f(a) < f(b)）

trick: step1 所需证的等式中常值改为变元x.

step2 移项构造函数

例

T24 f(x)在[0, 2a]上连续，f(0) = f(2a). 证明 $\exists x_0 \in [0, a]$，使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$

令 $g(x) = f(x) - f(x+a)$

则 g(x) 在 [0, a]上连续.

① 若 $f(0) = f(a)$ 则 $0 \in [0, a]$

就是使 $f(x_0) = f(x_0 + a)$ 成立的 x_0.

若 $f(0) \neq f(a)$ 则 $g(0) = f(0) - f(a)$

$g(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0) = -g(0)$.

由介值定理，存在

$x_0 \in [0, a]$, s.t.

$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0 + a) = 0$

作业：

3.6 T58

(a) $|f(x)| \le x^2$. 求 $f(x)$在0处导数

$|f(0)| \le 0 \Rightarrow |f(0)| = 0$ 即 $f(0)=0$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h}$$

$$-\frac{h^2}{h} \le \frac{f(h)}{h} \le \frac{h^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} -\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$

故 $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h}$$

$$\frac{h^2}{h} \le \frac{f(h)}{h} \le -\frac{h^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} -\frac{h^2}{h} = 0$$

故 $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = 0$

(除以h讨论正负)

分段函数

可导与否：

找a, b 使得以下函数处处可导.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x>-1 \\ bx^2-3 & x\le -1 \end{cases}$$

$ax+b$ 在 $(-1,+\infty)$ 上可导

bx^2-3 在 $(-\infty,-1)$ 上可导

只要 $f(x)$ 在 $x=-1$ 上可导则

$f(x)$ 在所有点处可导.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+} \frac{a(-1+h)+b-(b-3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+} \frac{-a+ah+3}{h}$$ 存在

$\Rightarrow 3-a=0 \Rightarrow a=3$ 且右导为3

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-} \frac{b(-1+h)^2-3-(b-3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-} \frac{b(1-2h+h^2)-3-b+3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-} -2b+bh = -2b$$

要求左导 = 右导 = 3 即

$-2b=3 \Rightarrow b=-\frac{3}{2}$.

△ $\lim_{\theta\to 0^-}(1+\csc\theta)$

$=\lim_{\theta\to 0^-} 1+\frac{1}{\sin\theta} = -\infty$

$\sin\theta\to 0^-$ 故 $\frac{1}{\sin\theta}$ 是负无穷.

△ $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^{1/3}} - \underbrace{\frac{1}{(x-1)^{4/3}}}_{\text{leading term}} = -\infty$

决定正负号.

2.6 T58.

$\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$

$=\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$

$\overset{x\neq 2}{=} \frac{x-1}{x(x+2)}$

(a)
$\lim_{x\to 2^+}\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{2-1}{2(2+2)} = \frac{1}{8}$

(b)
$\lim_{x\to -2^+}\frac{x-1}{x(x+2)} = \infty$

分子极限是常数,
分母极限是0;
再判断正负号可
知极限是∞

(c) $\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{x(x+2)} = \infty$

(d) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{1-1}{1(1+2)} = 0$

(e) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x(x+2)} = -\infty$

因此 $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x(x+2)}$ 不存在.