1.有理函数的原函数

1.1.有理函数是指两个实系数多项式的商 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$

1.2 积分思路

step1. $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 化为真分式

让 $\deg P(x)<\deg Q(x)$. 例如

$$\frac{x^5}{1-x^2}=\frac{x^5-x^3+x^3}{1-x^2}=-x^3+\frac{x^3}{1-x^2}=-x^3+\frac{x^3-x+x}{1-x^2}=-x^3-x+\frac{x}{1-x^2}$$

step2. 真分式总可以化成下列两类分式之和：$\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$

定理：设 $R(x)=P(x)/Q(x)$ 是一个真分式，其分母 $Q(x)$ 有分解式

$$Q(x)=(x-a)^\alpha\cdots(x-b)^\beta(x^2+px+q)^\mu\cdots(x^2+rx+s)^\nu$$

且 $p^2-4q<0$, $r^2-4s<0$. 我们有

$$R(x)=\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots$$

$$+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}$$

$$+\frac{K_\mu x+L_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{x^2+px+q}+\cdots$$

$$+\frac{M_\nu x+N_\nu}{(x^2+rx+s)^\nu}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s}$$

例：化 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$ 为部分分式.

$$Q(x)=x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$$

因此 $\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$

通分得 $x^3+1=A(x-1)^3+Bx+Cx(x-1)+Dx(x-1)^2$ (1)

最好不要暴力展开 请尝试以下方法

令 $x=0$ 得 $1=-A+0 \Rightarrow A=-1$

于是上式化为 $x^3+1+(x-1)^3 = Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2$

$$2x^3-3x^2+3x = Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2.$$

同除 x 得 $2x^2-3x+3 = B + C(x-1) + D(x-1)^2$

令 $x=1$ 得 $B=2$ 于是上式又化为

$$2x^2-3x+1 = C(x-1) + D(x-1)^2.$$

对x求导 $4x-3 = C + 2D(x-1)$

令 $x=1$ 得 $C=1$. 于是上式化为 $4x-4 = 2D(x-1)$

对x求导 $4 = 2D \Rightarrow D=2$.

例: 化 $\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}$ 为部分分式.

$$x^3+x^2+3x+3 = (x+1)(x^2+3).$$

故 原式 $= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$

通分得等式 $x = A(x^2+3) + (Bx+C)(x+1)$.

令 $x=-1$ 得 $A=-1/4$. 将A代回得

$$\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{3}{4} = (Bx+C)(x+1)$$

比较系数(也可求导作) 有 $\frac{1}{4}x^2+x+\frac{3}{4} = Bx^2+(B+C)x+C$

即 $B=1/4$, $C=3/4$

step3 找 $\frac{A}{(x-a)^k}$ 与 $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ 的原函数.

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \int \frac{A}{(x-a)^k}d(x-a) = \begin{cases} A\ln|x-a|+C, & k=1 \\ \frac{A}{-k+1}(x-a)^{-k+1} & k\geq 2 \end{cases} \quad (\text{因为}k>0)$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx \xlongequal[\substack{\text{导数} \\ 2x+p}]{\substack{\text{积法四} \\ \text{配分母}}} \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(-\frac{Ap}{2}+B\right)\underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}}_{\text{递推}}$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx \overset{\text{分母配方}}{=\!=} \int \frac{Ax+B}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^k}dx \xlongequal[\text{记}\, q-\frac{p^2}{4}=a^2]{\text{令}\ x+\frac{p}{2}=u} \int \frac{A\left(u-\frac{p}{2}\right)+B}{(u^2+a^2)^k}du$$

$$\underline{\text{配分母导数}} \int \frac{\frac{A}{2}(2u)-\frac{AP}{2}+B}{(u^2+a^2)^k}du = \frac{A}{2}\int\frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^k} + \underline{\underline{\int \frac{-\frac{AP}{2}+B}{(u^2+a^2)^k}du}}$$

✓

递推.

$$\text{令 } I_k=\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{u}{(u^2+a^2)^k} - \int u\,\frac{-k(u^2+a^2)^{k-1}2u}{(u^2+a^2)^{2k}}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + k\int\frac{2u^2}{(u^2+a^2)^{k+1}}du$$

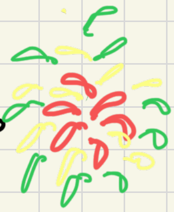
$$= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + k\int\frac{2(u^2+a^2)-2a^2}{(u^2+a^2)^{k+1}}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k\,I_k - 2a^2k\,I_{k+1}$$

$$\Rightarrow I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\frac{u}{(a^2+u^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}I_k$$

$$I_1 = \int\frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$$

Bingo



2. 数值积分

Trapezoidal Rule

$$\int_a^b f(x)dx \approx T = \frac{\Delta x}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n), \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$|E_T| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$，M是 f'' 在 $[a,b]$ 的上界

Simpson's Rule

$$\int_a^b f(x)dx \approx S = \frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n), \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$|E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$，M是 $|f^{(4)}|$ 在 $[a,b]$ 上的上界.

3. 反常积分.

△反常积分分为两类 $\begin{cases} \text{无穷积分} \\ \text{瑕积分.} \end{cases}$

3.1 无穷积分

1. Def: 若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在且有限，则把此极限记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. 同理可定义 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad \text{与 } c \text{ 选取无关.}$$

2. 很重要的例子，最好记住：

$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，在 $p\leq 1$ 时发散.

Pf: Case I. $p=1$. $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b - \ln a = +\infty$

Case II $p\neq 1$. $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_a^b$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{-p+1}-a^{-p+1}}{-p+1} = \begin{cases} +\infty & p<1 \\ \frac{a^{-p+1}}{p-1} & p>1 \end{cases}$$

例: $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$

$= \int_2^{\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^p}$

$= \int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u^p}$

当 $p>1$ 时收敛.

3.定理：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积且有原函数 F，那么

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(a)$$

若 f 在 $(-\infty,a]$ 上可积且有原函数 F，那么 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(a)-F(-\infty)$

若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积有原函数，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(-\infty)$

这里 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$. $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$.

4. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$. 作换元 $x=a\tan t$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt = \frac{1}{a^2}$$

一个无穷积分换元后可变成常义下的积分；反之，一个常义积分换元后也可变成无穷积分.

3.2 瑕积分

1.Def：设 f 在 $(a,b]$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，但对 $\forall\varepsilon\in(0,b-a)$，$f$ 在 $[a+\varepsilon,b]$ 上可积.

若极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ 存在且有限，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$

假如 a,b 同为瑕点，$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$（假定右边两个瑕积分收敛）

2. 很重要的例子，最好记住 $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ 当 $p<1$ 时收敛，当 $p\geq1$ 时发散

pf: Case I $p=1$ $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^a\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\ln a-\ln\varepsilon = -\infty$ 发散.

Case II $p\neq1$. $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^a\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\frac{a^{1-p}-\varepsilon^{1-p}}{1-p} = \begin{cases}\frac{a^{1-p}}{1-p} & p<1\\ +\infty & p>1\end{cases}$

例 $\int_1^2\frac{dx}{x(\ln x)^p}$

$=\int_1^2\frac{d\ln x}{(\ln x)^p}$

$=\int_0^{\ln2}\frac{du}{u^p}$

当 $p<1$ 时收敛.

例 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$. 0是该积分的瑕点.

令 $x=\frac{\pi}{2}-t$, 则 $I=-\int_{\pi/2}^{0}\ln\sin(\frac{\pi}{2}-t)\,dt=\int_0^{\pi/2}\ln\cos t\,dt$

$$2I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx+\int_0^{\pi/2}\ln\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}\ln(\tfrac{1}{2}\sin 2x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\ln\tfrac{1}{2}+\ln\sin 2x\,dx$$

$$=-\ln 2\cdot\frac{\pi}{2}+\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,dx \qquad (*)$$

令 $2x=t$ 得 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\,dt$

$=\frac{1}{2}I+\underline{\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\,dt.}$ 令 $t-\frac{\pi}{2}=u$

$=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin(u+\frac{\pi}{2})\,du=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln\cos u\,du=\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}I=I.$

(*)式化为 $2I=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I$. $\Rightarrow$ $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

4. 反常积分收敛性本质上是极限收敛问题

Direct comparison test

f,g 在 $[a,+\infty)$ 上连续 且 $0\le f(x)\le g(x)$, $\forall x\ge a$

若 $\int_a^{\infty}g(x)\,dx$ 收敛 则 $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ 收敛.

若 $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ 发散 则 $\int_a^{\infty}g(x)\,dx$ 发散.

Limit comparison test

若 f,g 在 $[a,+\infty)$ 上恒正，且 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$, $0<L<\infty$, 则

$\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ 与 $\int_a^{\infty}g(x)\,dx$ 有相同敛散性.

T41

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sin t}$$

$$< \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{收敛}$$

T32

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$= -\left.\frac{(1-x)^{1/2}}{1/2}\right|_0^1 + \left.\frac{(x-1)^{1/2}}{1/2}\right|_1^2$$

$$= 4$$

T43

$$\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} + \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{1-x^2}}_{<0}.$$

$\frac{1}{1-x^2} > 0$，当 $x \in (0,1)$

故 $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2} > \int_1^2 \frac{dx}{1-x^2}$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|\right)\Big|_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_1^2 = -\infty$$

因此原积分发散.