week11 习题课

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 的定义：若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则记该极限值为 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

若极限 $\lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$ 存在，则记该极限值为 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

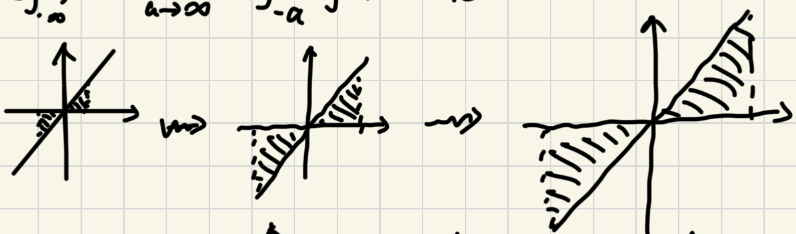
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的定义是什么？以下罗列一些常见的、容易想到的定义方式

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 或者 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

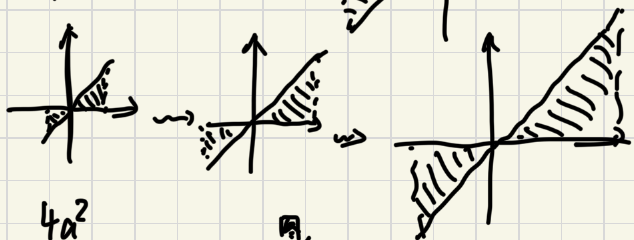
一个好的定义看起来应该是“自然”的，即看起来不特殊。但第一种定义显得太特殊了.

定义 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 的一个想法是对上限与下限求一个极限，但是以 $-a, a$ 作极限太特殊了。为什么不能是 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^{2a} f(x)dx$ 呢？

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} x\,dx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{a}=0.$$



$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{2a} x\,dx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{2a}=\lim_{a\to\infty}\frac{4a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=+\infty$$



当然也可以定义 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-2a}^{a} x\,dx=\lim\limits_{a\to\infty}\frac{a^2}{2}-\frac{4a^2}{2}=-\infty$. (图略)

但是这三种定义计算结果都不同，原因在于不同的取极限方式会带来不同的结果.

所以这就从侧面反映出，我们定义的无穷积分应当要和取极限的方法无关.

定义：任取 $a\in\mathbb{R}$，若无穷积分 $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛，则称无穷积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 收敛

并规定 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

*证明 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 a 无关.

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_a^{+\infty} f(x)dx-\int_{-\infty}^{c} f(x)dx-\int_c^{+\infty} f(x)dx$$

$$=\underline{\int_{-\infty}^{c} f(x)dx}+\underline{\int_c^{a} f(x)dx}+\underline{\int_a^{c} f(x)dx}+\int_c^{+\infty} f(x)dx-\underline{\int_{-\infty}^{c} f(x)dx}-\int_c^{+\infty} f(x)dx$$

$$=0$$

* 无穷积分让大家第一次意识到涉及无穷的东西非常weird，很多时候是反直觉的

比如 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b \overset{不一定}{=} \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx} \overset{不一定}{=} \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}$ ……

* 无穷积分的定义是很能体现数学精神的，我们不能把一个特殊的东西作为定义，除非定义结果与它无关.

(我们不能把一个特殊的取极限过程作为定义，因为定义结果和取极限过程有关)

Quiz:

T1. 求导 x^x. $y = e^{x\ln x}$. $y' = x^x(\ln x + 1)$

T2. $\int \ln x\,dx$. $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$

T3 (1) $\int \tan x\,dx$

(2) $\int \tan^2 x\,dx$. $\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,dx = \tan x - x + C$

T4. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}\,dx$. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}\,dx = \int \cos x - \sin x\,dx = \sin x + \cos x + C$

T5. $\int \sec x\,dx$. $\int \sec x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,d\sin x = \int \frac{d\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}\,d\sin x = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+\sin x|}{|1-\sin x|} + C$

T6 $\int \sec x\tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \sec x + C$

T7 $\int \sec^3 x\,dx$. Tips (用T5、T6结果) $\int \sec^3 x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int \frac{1}{\cos x}(1+\tan^2 x)\,dx$

$= \int \sec x\,dx + \int \sec x\tan^2 x\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \int \tan x\,d\sec x$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{1-\sin x}\right| + \tan x\sec x - \int \sec x\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ $\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$

$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+1}{1-\sin x}\right| + \frac{1}{2}\tan x\sec x$

T8 $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin 2x} = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}\, dx$

$$= \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\, dx = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} \sin x - \cos x\, dx$$

$$= \sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4} - (\cos x + \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0+1) - (-1+0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

T9

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$$

$$= \int \sin^2 x \cos^2 x\, d\sin x$$

$$= \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)\, d\sin x$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

T10 $\int \frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}\, dx$

$$= \int \frac{(1+x^2)+x}{x(1+x^2)}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \ln x + \arctan x + C$$

T11

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}\, dx$$

$$= \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \int x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$$

T12

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}\, dx$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= -x^{-1} - \arctan x + C$$

T13 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \tan x - \cot x + C$$

T14. $\int (ax+b)^m\, dx$

$$= \frac{1}{a}\int (ax+b)^m\, d(ax+b)$$

$$= \begin{cases} m=-1 & \frac{1}{a}\ln|ax+b| \\ m\neq -1 & \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} \end{cases}$$

T15

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

T16. $\int_{-1}^{0} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\, dy$

$$= \int_{-1}^{0} \sqrt{\frac{(1+y)^2}{1-y^2}}\, dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1+y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy + \int_{-1}^{0} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

$$= \arcsin y\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

T17

$$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 2\int e^{3\sqrt{x}}\,d\sqrt{x}$$

$$= \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}} + C$$

T18

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$$

配方

$$= \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$= \int \frac{d\frac{x-2}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}$$

$$= \arcsin\frac{x-2}{2} + C$$

T19

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$$

$$= \int \frac{e^{-\frac{x}{2}}\,dx}{e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{e^x-1}}$$

$$= -2\int \frac{de^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}}$$

$$= -2\arcsin e^{-\frac{x}{2}} + C$$

T20

$$\int \tan^3 x\sec^2 x\,dx$$ (Tips：用 $\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C$)

$$= \int \sec x\tan^2 x\,d\sec x$$

$$= \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,d\sec x$$

$$= \int \sec^3 x - \sec x\,d\sec x$$

$$= \frac{1}{4}\sec^4 x - \frac{1}{2}\sec^2 x + C$$