Week10 习题课.

- 解ODE：分离 dy 和 dt 变成 $f(y)dy = f(t)dt$ 的形式.

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{1}{y}dy = kdt$$

$$\Rightarrow \ln|y| = kt + C$$

$$\Rightarrow |y| = e^{kt}e^{C}$$

$$\Rightarrow y = Ae^{kt}$$

例

$$y(x+1)dy = x(y^2+1)dx$$

$$\frac{ydy}{y^2+1} = \frac{xdx}{x+1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dy^2}{y^2+1} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)d(x+1)$$

两边积分

$$\frac{1}{2}\ln|y^2+1| = x+1 - \ln|x+1| + C$$

Δ例

$$2x+y^2+2xy\cdot y'=0$$

x 与 y 不可分离. 但是令 $\psi(x,y) = x^2+xy^2$

则有 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x+y^2$ $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2xy$.

即原方程化为 $\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$

即 $\frac{d}{dx}\psi(x,y) = 0$. 于是 $\psi(x,y)=C$

我们得到隐式解 $\psi(x,y) = x^2+xy^2=C$

- 二阶常系数齐次微分方程

$$y''+py'+q=0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y + p\frac{d}{dx}y + qy = 0$$

线性算子 $\frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q$ 作用 $V=\{$函数空间$\}$

求方程的通解就是求线性空间

本征值为0的特征子空间(去找该空间的基)

这个特征子空间的每一个向量(函数)

都是方程的解. ⇝ 线代中 $Ax=0$ 问题.

Δ为什么令 $y = e^{rx}$

$$\frac{d}{dx}e^{rx} = re^{rx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{rx} = r^2e^{rx}$$

⇝ e^{rx} 是现成的 $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$ 的特征向量.

令 $y=e^{rx}$，得方程

$$r^2+pr+q=0$$

① 若有两个不等实根 $r_1 \neq r_2$

则我们找到了两个特征子空间的线性无关[1]的解 e^{r_1x} 与 e^{r_2x}.

其的叠加可以得到所有解(通解)

$$y=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$$ [2]

② 若有两个相等实根 $r_1=r_2=r$

则我们只得到一个线性无关的解 e^{rx}.

为了得到另一个与 e^{rx} 线性无关的向量, 我们取 xe^{rx}.

易证 $\frac{d^2}{dx^2}xe^{rx} + p\frac{d}{dx}xe^{rx} + qxe^{rx} = 0$

故 xe^{rx} 也是方程的解.

③ 若有一对共轭复根($\Delta<0$)
(必共轭)

$r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$.

我们得到两个线性无关解

$$e^{r_1x}=e^{\alpha}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$e^{r_2x}=e^{\alpha}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

这两个线性无关向量组合成如下两个向量还是线性无关的

$$\frac{e^{r_1x}+e^{r_2x}}{2} \quad , \quad \frac{e^{r_1x}-e^{r_2x}}{2i}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$e^{\alpha}\cos\beta x \qquad e^{\alpha}\sin\beta x$$

因此通解是基的叠加 $y=Ae^{\alpha}\cos\beta x+Be^{\alpha}\sin\beta x$.

△解决上面两个问题.

[1] 当$r_1\neq r_2$, e^{r_1x}与e^{r_2x}线性无关?

类比线性代数中的线性无关定义,我们可以写下两个函数线性无关的定义

Def: 称$f(x)$与$g(x)$线性无关,若

$af(x)+bg(x)=0$, 对所有定义域内的x成立

则 $a=b=0$

现在假设有 $ae^{r_1x}+be^{r_2x}=0$, $\forall x\in$成立.

既然上式对所有x成立,取特殊值就可以了.

令$x=0 \Rightarrow a+b=0$

令$x=1 \Rightarrow ae^{r_1}+be^{r_2}=0$ $\Rightarrow ae^{r_1}-ae^{r_2}=0$

即 $a(e^{r_1}-e^{r_2})=0$

由于$e^{r_1}\neq e^{r_2} \Rightarrow a=b=0$.

因此e^{r_1x}与e^{r_2x}确实线性无关.

*同理,可以证e^{rx}与xe^{rx}线性无关.

$$ae^{rx}+bxe^{rx}=0$$

$x=0 \Rightarrow a=0$

$x=1 \Rightarrow ae^{r}+be^{r}=0 \Rightarrow b=0$

[2] 为什么特征子空间维数是2,
即为什么找到两个线性无关的函数一叠加就可以得到所有解?

为了通俗易懂(实际是我懒得看,太多了orz),这里用一些直觉性的、不严谨的说法.如果你觉得不自然,也很正常.

方程中出现了二阶导,所以直觉上看解微分方程要做2次求导的逆操作,即积两次分.每次积分出一个常数,积2次分要多2个常数.每个常数要一个初条件才能将值确定.

对于二阶常系数微分方程,需要2个初条件才能将解确定下来.所以解的自由度是2,也就是我们需要找2个线性无关的函数作为基就能张成全部空间(张成的含义是表出空间中任何一个向量)

• Schrödinger 方程与分离变量法.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Psi$$

$$\Psi(\vec{x},t)=\Phi(\vec{x})T(t)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(\vec{x})T(t)\right)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\left(\Phi(\vec{x})T(t)\right)+V\Phi(\vec{x})T(t)\right]$$

$$\Phi(\vec{x})\,i\hbar\frac{d}{dt}T(t)=T(t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi(\vec{x})\right)+V\Phi(\vec{x})T(t)$$

$$\frac{i\hbar}{T(t)}\frac{d}{dt}T(t)=\frac{1}{\Phi(\vec{x})}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi(\vec{x})+V\Phi(\vec{x})\right]$$

等号左边只与坐标有关，等号右边只与时间有关.
因此 等式两端等于一个常数，令为 a^2.

$$\frac{i\hbar}{T(t)}\frac{d}{dt}T(t) = -a^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}T = \frac{-a^2}{i\hbar}T$$

$$\Rightarrow T(t) = Ae^{\frac{ia^2}{\hbar}}$$

等号右边 成为 $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Phi(\vec{x}) = -a^2\Phi(\vec{x})$

只要解这个方程就可以解出 Schrödinger equ.

应用题的一个提醒

e^{-kt} ：e^x 函数中 x 必须无量纲.

t 单位是 min，k 单位是 min^{-1}.

• L'Hopital's Rule

[Def] f 与 g 在含 a 的开区间 I 上可导. $x \neq a$ 时，$g'(x) \neq 0$.

则 $f(a) = g(a) = 0$ 或 $\begin{cases} f(x) \to \pm\infty \\ g(x) \to \pm\infty \end{cases}$ 当 $x \to a$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[Rmk]
注意，当极限不再是 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 时，不能再使用 L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} \to \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x} \left(\text{Not } \frac{0}{0}\right) = 0.$$

再洛 $\rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ (错误)

△ $\infty\cdot 0$ 与 $\infty-\infty$ 要想方设法化成 $\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$.

① $\infty\cdot 0$ 常常把 0 变倒数，可变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$

[例]

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\cancel{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

[例]

$$\lim_{x\to 0^+} x\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= 1$$

② $\infty-\infty$ 要通分

[例]

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x\ln x + x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{\ln x + 1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

Δ 若 $\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = L$

则 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^{L}$

(注意 $f(x)>0$)

T55

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-1/\ln x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{\ln x}\ln x}$

$= e^{-1}$

(14)

$\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x - x - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}\ln(e^x - x - 1)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x-x-1)}{\ln x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{e^x-x-1}(e^x-1)}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{xe^x - x}{e^x-x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x + xe^x - 1}{e^x - 1}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x + e^x + xe^x}{e^x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} 2 + x = 2$

原式 $= e^2$

(4)

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}{\ln x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{1/x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{x}{(1+x^2)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan x}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} -\frac{\frac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2x}{2x} = -1$

故原式 $= e^{-1}$

(8) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - (e^{x\ln x})'}{-1 + 1/x}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - x^x(1+\ln x)}{-1 + 1/x}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{-x^x(1+\ln x)^2 - x^x\frac{1}{x}}{-1/x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 1} x^{x+2}(1+\ln x)^2 + x^{x+1} = 1+1 = 2$

- 反三角函数

一些公式:

$$\frac{d(\sin^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \quad |u|<1$$

$$\frac{d(\cos^{-1}u)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, \quad |u|<1$$

$$\frac{d(\tan^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cot^{-1}u)}{dx} = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\sec^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad |u|>1$$

$$\frac{d(\csc^{-1}u)}{dx} = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad |u|>1$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad (u^2<a^2)$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$$

用 $\boxed{f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}u) = \frac{1}{(\sin u)'\big|_{u=f^{-1}(x)}} = \frac{1}{\cos u\big|_{u=\sin^{-1}(x)}} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\boxed{例}$

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$= \int \frac{d(x-2)}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}} \quad (|x-2|>1)$$

$$= \begin{cases} \int \frac{d(x-2)}{(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}} & x-2>1 \\ -\int \frac{d(x-2)}{-(x-2)\sqrt{(x-2)^2-1}} & x-2<-1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int \frac{d(x-2)}{|x-2|\sqrt{(x-2)^2-1}} & x-2>1 \\ -\int \frac{d(x-2)}{|x-2|\sqrt{(x-2)^2-1}} & x-2<-1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sec^{-1}(x-2) + C & x-2>1 \\ -\sec^{-1}(x-2) + C & x-2<-1 \end{cases}$$

$\triangle \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ → $f(x)$ 增长比 $g(x)$ 快. ⇒ Notation $f(x) = o(g(x))$

△当 $f(x), g(x)$ 在 x 充分大时有 $f(x) > 0, g(x) > 0$，若存在正数 M s.t.
$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant M$ 在 x 充分大时成立. 则称 f is of at most order of g as $x \to \infty$.
记作 $f = O(g)$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \to f(x) \text{ 和 } g(x) \text{ 增长同阶 是上面的一个特例}}$ ←这个比较实用.
一般用 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$
来证 $f(x) = O(g(x))$

例.
$x \to x_0$ 时，$\alpha = o(1)$. 求证

(1) $o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$　　(2) $o(c\alpha) = o(\alpha)$ (c为常数)

(3) $(o(\alpha))^k = o(\alpha^k)$　　(4) $\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + o(\alpha)$

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{1} = 0$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0$.

(1)
$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(\alpha)+o(\alpha)}{\alpha} = \lim_{x\to x_0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} + \lim_{x\to x_0} \frac{o(\alpha)}{\alpha} = 0+0=0.$$

$\Rightarrow o(\alpha) + o(\alpha) = o(\alpha)$

(2)
$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(c\alpha)}{\alpha} = \lim_{x\to x_0} c\frac{o(c\alpha)}{c\alpha} = c\lim_{x\to x_0} \frac{o(c\alpha)}{c\alpha} = c\cdot 0 = 0$$

(3)
$$\lim_{x\to x_0} \frac{(o(\alpha))^k}{\alpha^k} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)^k = 0^k = 0$$

(4)
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{1+\alpha} - 1 + \alpha}{\alpha} = \lim_{x\to x_0} \frac{1-(1+\alpha)+\alpha(1+\alpha)}{\alpha(1+\alpha)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha^2}{\alpha+\alpha^2} \overset{洛}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{2\alpha}{1+2\alpha} = 0$$

• 托里拆利小号

$f(x)=\frac{1}{x}$, $x\geq 1$ 绕x轴旋转

$$V=\int_1^{\infty}\pi\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{\pi}{x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to\infty}-\pi x^{-1}\Big|_1^a$$

$$=\lim_{a\to\infty}\pi(1-a^{-1})$$

$$=\pi$$

$$S=\int_1^{\infty}2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^{\infty}2\pi\frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\,dx$$

$$>\int_1^{\infty}2\pi\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\lim_{a\to\infty}\int_1^a 2\pi\frac{1}{x}dx$$

$$=\lim_{a\to\infty}2\pi\ln x\Big|_1^a$$

$$=\lim_{a\to\infty}2\pi\ln a=\infty$$

三维体积有限，表面积却无限大、