# 习题课week 1 讲稿

☆习题课安排：复习+作业题

- 课本上有一大堆求极限的laws

如 $\lim\limits_{x\to c} f(x)+g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \lim\limits_{x\to c} g(x)$

$\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ 等等.

注意 ① 子部极限存在才能用

$\lim\limits_{x\to\infty} 1 = \lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to\infty} x}_{+\infty}\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}_{0} = ?$

② $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ 要求分母非0.

"$\frac{0}{0}$"型，"$\frac{\infty}{0}$"型，"$\frac{0}{\infty}$"型，"$\frac{\infty}{\infty}$"型

$\infty$ $\qquad$ 0

作业经常让求的

例 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$ 求 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ （解方程）

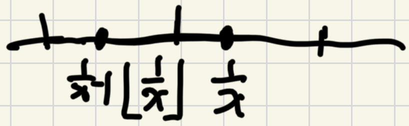
例 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ （不能解方程，凑）

- Sandwich Thm $\begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to c} g(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

熟悉取整函数

例. $\lim\limits_{\theta\to 3^+} \frac{\lfloor\theta\rfloor}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 3^+} \frac{3}{\theta} = 1.$

例. $\lim\limits_{x\to 0} \lfloor\frac{1}{x}\rfloor \sin x$ ☆ $\lfloor 3.2\rfloor = 3$

$\frac{1}{x} - 1 \le \lfloor\frac{1}{x}\rfloor \le \frac{1}{x}$ ☆ 


$\vdots$

- $f(x) \le g(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) \le \lim\limits_{x\to c} g(x)$

Caution $f(x) < g(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x) < \lim\limits_{x\to c} g(x)$ ?

不对! $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $g(x) = \frac{1}{x^2}$

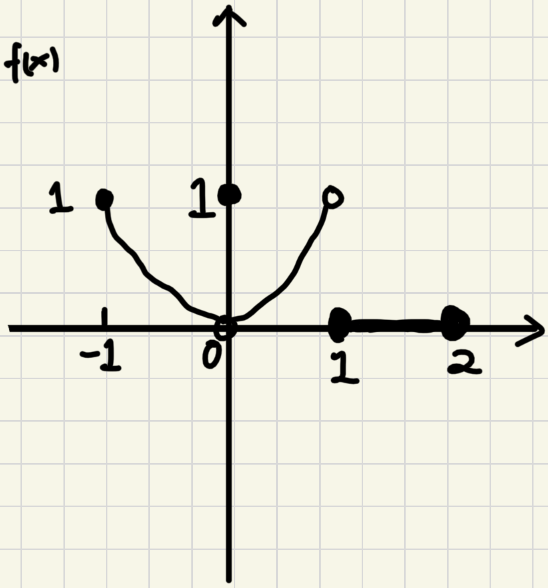
当 $x>1$ 时 $f(x) < g(x)$ 但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

- Devide A by B 是 $A \div B$.

• 左极限存在，右极限存在，左极限＝右极限

则极限存在。

例




△ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1$

△ $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

f(x)在0处极限存在但不等于函数值f(0)=1.

△ $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0\end{array}\right. \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在.

△ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0.$

• 求极限的一些技巧。

① 出现根式有理化(例A) $\xrightarrow[\text{一部分是多项式}]{\text{常出现有}}$ 多项式求极限(例B)

② $\frac{0}{0}$型 $\frac{\infty}{\infty}$型常用因式分解 $\left\{\begin{array}{l} a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}) \\ \text{多项式除法(例C)}\end{array}\right.$

出现三角函数 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \\ \text{各种公式} \end{cases}$

各种公式:

$\left.\begin{aligned}\sin^2 x &= 1-\cos^2 x \\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\end{aligned}\right\}$ sinx与cosx互化

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

积化和差/和差化积 (例D)

例A.(根式有理化)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

正无穷

例B.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0} \quad (b_m\neq 0)$$

除以分母最高幂次

$$\stackrel{\text{除以分母最高幂次}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^{n-m}+a_{n-1}x^{n-m-1}+\cdots+a_0 x^{-m}}{b_m+b_{m-1}x^{-1}+\cdots+b_0 x^{-m}}$$

$$=\begin{cases}\infty & n>m\\ \dfrac{a_n}{b_n} & n=m \\ 0 & n<m\end{cases}$$

例C

$$3x^3-2x^2-1=(x-1)\cdot ?$$

$$
\begin{array}{r l}
 & 3x^2+x+1 \\
x-1 \big) & 3x^3-2x^2-1 \\
 & 3x^3-3x^2 \\
\hline
 & x^2-1 \\
 & x^2-x \\
\hline
 & x-1 \\
 & x-1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

把x的幂次按从大到小排列.

作业的问题:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{mx}\cdot\cancel{\frac{nx}{\sin nx}\cdot\frac{mx}{nx}}$

$\underbrace{t=x-\pi \quad 换元}$

原式 $=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin(m(t+\pi))}{\sin[n(t+\pi)]}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(mt+m\pi)}{\sin(nt+n\pi)}$$

$$=\frac{(-1)^m}{(-1)^n}\lim_{t\to0}\frac{\sin mt}{\sin nt}$$

$$=(-1)^{m-n}\lim_{t\to0}\frac{\sin mt}{mt}\cdot\frac{mt}{nt}\cdot\frac{nt}{\sin nt}$$

$$=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$$

例D (公式在下方)

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x-1})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$$

$$=\sin 0=0.$$

cos… 是有界量，有界量×无穷小 = 无穷小.

$$\sin x-\sin y$$

$$=\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)-\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

2. Find $a, b$ s.t. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\sqrt{x} - a}{\cos x} = b$.

为使极限存在 $\lim\limits_{x \to \pi/2} \sqrt{x} - a = 0$

故 $a = \lim\limits_{x \to \pi/2} \sqrt{x} = \sqrt{\pi/2}$

$$b = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\pi/2}}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{x - \pi/2}{\cos x(\sqrt{x} + \sqrt{\pi/2})}$$

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{x - \pi/2}{\cos x} \lim_{x \to \pi/2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\pi/2}}$$

第一个极限令 $t = x - \pi/2$ 原式 $= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{\cos(t + \pi/2)} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\pi/2}}$

$$= \lim_{t \to 0} -\frac{t}{\sin t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi/2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi/2}}$$

类似问题

Find $a,b$, s.t. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-ax-b=0$ 成立.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-ax-b$

$$\overset{有理化}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$$

上下除以分母最高阶次

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x-(1+2ab)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+1}+a+\frac{b}{x}}$$ (注意若 $x<0$ 则 $\sqrt{\ }$ 需添负)

(要求) $=0$

则 $\begin{cases}1-a^2=0\\1+2ab=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$

$a=-1$ 时变号型 要仔细check.

原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}=+\infty$ 舍去.

---

拓展.(不见函数有极限)

△ $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在. $x\to0$ 的含意是各种方式趋于0.

令 $x_n=\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}\to0\quad(n\to\infty)$

令 $t_n=\frac{1}{2n\pi}\to0\quad(n\to\infty)$

$f(x)=\sin\frac{1}{x}$. $f(x_n)=1\to1$, $f(t_n)=0\to\underset{(不一样)}{0}\quad(n\to+\infty)$.

△ 实数的稠密性. 无理数是靠有理数取极限得来（填洞）

△ 处处不存在极限的函数.

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

对任意 $x_0\in\mathbb{R}$，挑选全由有理组成的数列 $\{s_n\}$ 和全由无理数组成的数列 $\{t_n\}$.

$\lim\limits_{x\to\infty} D(s_n)=1$. $\lim\limits_{x\to\infty} D(t_n)=0$. 故 $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ 不存在

△ 芝诺的乌龟

阿基里斯：A　10m/s
乌龟　：T　1m/s

A让T先爬100m，自己再出发

A跑完100m，用了10s，乌龟这段时间跑了10m.

A跑完10m，用了1s，乌龟领先1m.

⋮

$a_n$ s，乌龟领先 $a_n\cdot 1$. m

A跑完 $a_n$ m，用了 $\frac{a_n}{10}$ s，乌龟领先 $\frac{a_n}{10}\cdot 1$ m.

$$\frac{100}{10}+\frac{100}{10^2}+\frac{10}{10^3}+\cdots=\sum_{n=1}^{100}\frac{100}{10^n}$$

这个极限值是有限的，所以A可以追上T.

△ $0.99\cdots = 1$ 因为 $0.99\cdots$ 与 1 要多近有多近.

△ $\varepsilon$-$\delta$ 语言.

① $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$　　② $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$

③ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$　　④ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

①: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, s.t. $\forall |x-c|<\delta$, $|f(x)-L|<\varepsilon$.

② $\forall A>0\ \exists \delta>0$, s.t. $\forall |x-c|<\delta$, $f(x)>A$

③ $\forall \varepsilon>0$, $\exists A>0$, s.t. $\forall x>A$, $|f(x)-L|<\varepsilon$.

④ $\forall A>0$, $\exists B>0$, s.t. $\forall x>B$, $f(x)>A$.

△ 单射、满射、集合的势.

偶数和自然数"一样多"

$$f: 2\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$2k \longmapsto k$$

$$g: \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$$
$$n \longmapsto 2n.$$

$gf(2k) = 2k$

$fg(n) = n.$

$[0, 1)$ 中所有实数比自然数"多"

假如我们有了一份完美对应表

1: 0.1234⋯

2: 0.3567⋯

3: 0.6218⋯

⋮

这个数没有任何对应

造一个小数 第一位不是 1, 第二位不是 5, 第三位非 1